CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Fizyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EFAP-R0-100, EFAP-R0-200
Termin egzaminu:	19 maja 2026 r.
Data publikacji dokumentu:	26 czerwca 2026 r.

Ogólne zasady oceniania arkuszy egzaminacyjnych z fizyki

1. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązał zadanie (użył poprawnej metody, uwzględnił warunki zadania, otrzymał poprawny wynik) metodą, której nie uwzględniały zasady oceniania (chodzi o jakościowo inną metodę – np. użycie prawa / wzoru / twierdzenia / metody rachunkowej spoza podstawy programowej – a nie o metodę równoważną tym w zasadach oceniania), to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.
2. Jeżeli zdający poda w wyniku końcowym wartość wielkości fizycznej bez jednostki lub z błędną jednostką, to nie spełnia warunków określonych w zasadach oceniania na maksymalną liczbę punktów.
3. Ocenie podlegają te fragmenty pracy zdającego, które dotyczą polecenia.
4. Jeżeli na pewnym etapie rozwiązania zadania zdający podaje kilka sprzecznych rozwiązań i nie wskazuje, które z nich należy uznać za poprawne, to może uzyskać punkty tylko za wcześniejsze poprawne etapy rozwiązania.
5. Jeżeli na pewnym etapie rozwiązania zadania zdający podaje kilka sprzecznych rozwiązań i wskazuje, które z nich należy uznać za poprawne, to zapisów w innych rozwiązaniach nie bierze się pod uwagę w ocenianiu.
6. Jeżeli na dowolnym etapie rozwiązania zadania zdający popełnia błąd rachunkowy (albo błąd przepisania wartości z danych albo wcześniejszych etapów rozwiązania), ale stosuje poprawne metody rozwiązania i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie zadania do końca, to ocenę rozwiązania obniża się o 1 punkt.
7. Jeżeli w poleceniu jest dyspozycja o zapisaniu wyniku zaokrąglonego do pewnej liczby cyfr znaczących, to oznacza, że wynik musi być podany w postaci rozwinięcia dziesiętnego liczby i z określonym w poleceniu zaokrągleniem. Jeżeli w zadaniu z takim poleceniem zdający przedstawia wynik w postaci ułamka zwykłego, lub w postaci z występującym π lub np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ albo podaje wynik ze zbyt dużą lub zbyt małą liczbą cyfr znaczących – to nie otrzymuje maksymalnej liczby punktów.
8. Wszelkie wzory / związki / zależności / relacje między wielkościami mogą być równoważnie zapisane za pomocą symboli lub liczb, które to liczby są wartościami wielkości występujących w tych wzorach / związkach / zależnościach / relacjach.
9. Jeżeli w zasadach oceniania danego etapu rozwiązania wymienione jest, że zdający korzysta / uwzględnia / zapisuje dane związki / zależności / prawa / wzory, to mogą być one zapisane oddzielnie, albo nawet w jednym równaniu (o ile to możliwe).

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Gdy wymaganie dotyczy materiału gimnazjum, dopisano „(G)”, a gdy zakresu podstawowego IV etapu edukacyjnego – dopisano „(P)”.

Zadanie 1.1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.5) rysuje i interpretuje wykresy zależności parametrów ruchu od czasu; 1.6) oblicza parametry ruchu podczas swobodnego spadku i rzutu pionowego.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
FP

Zadanie 1.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.4) wykorzystuje związki pomiędzy położeniem, prędkością i przyspieszeniem w ruchu jednostajnym i jednostajnie zmiennym do obliczania parametrów ruchu; 1.5) rysuje i interpretuje wykresy zależności parametrów ruchu od czasu; 1.6) oblicza parametry ruchu podczas swobodnego spadku i rzutu pionowego.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r. poz. 977).

Zasady oceniania[2]

2 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości początkowej rzutu w górę **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_0 \approx 7{,}85\ \mathrm{m/s}$

1 pkt – zapisanie/zastosowanie zależności między prędkością końcową a prędkością początkową, czasem i przyśpieszeniem w ruchu jednostajnie opóźnionym **oraz** uwzględnienie, że prędkość końcowa wynosi zero, a przyśpieszenie jest równe przyśpieszeniu grawitacyjnemu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$0 = v_0 - gt_{AW}$$

LUB

– skorzystanie z symetrii w czasie dla rzutu pionowego w górę i spadku swobodnego **oraz** zapisanie/zastosowanie zależności między prędkością końcową a czasem i przyśpieszeniem w spadku swobodnym bez prędkości początkowej, np.:

$v_0 = v_{k\ spadanie} = gt_{WA}$ (lub zapisy równoważne)

LUB

– zapisanie kompletu równań wynikających z równań ruchu (lub/i zasady zachowania energii mechanicznej), z których można obliczyć v_0, z prawidłową identyfikacją czasów w równaniach na h_{max} i h_0, np. zapisy równoważne poniższym:

$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$ oraz $h_{max} = h_0 + v_0 \cdot 0{,}8 - \frac{1}{2}g \cdot 0{,}8^2$ oraz $h_{max} = \frac{1}{2}g \cdot 1^2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania[3]

<u>Sposób 1.</u>

Ciało C w chwili $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ miało prędkość początkową o wartości v_0 skierowaną pionowo w górę, a w chwili $t = 0{,}8\ \mathrm{s}$ ciało osiągnęło wysokość maksymalną i miało prędkość końcową równą zero: $v_k = 0$. Od chwili $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ w czasie $t_{AW} = 0{,}8\ \mathrm{s}$ ciało poruszało się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyśpieszeniem grawitacyjnym $\vec{g}$. Skorzystamy z zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym z przyśpieszeniem o wartości g:

$$v_k = v_0 - gt_{AW} \quad \text{oraz} \quad v_k = 0$$

$$0 = v_0 - 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} \quad \rightarrow \quad v_0 = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} \approx 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

<u>Sposób 2.</u>

Skorzystamy z symetrii w czasie między wznoszeniem swobodnym w rzucie pionowym a spadkiem swobodnym z przyśpieszeniem grawitacyjnym (wartość prędkości początkowej wznoszenia jest równa wartości prędkości końcowej spadania). Rozważmy ruch zastępczy – spadek swobodny (z h_{max} do h_0) bez prędkości początkowej w czasie $t_{WA} = 0{,}8\ \mathrm{s}$. Zatem:

$$v_0 = v_{k\ spadania} \quad \text{oraz} \quad v_{k\ spadania} = gt_{WA} = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} \approx 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_0 \approx 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

---

[2] Pod opisem warunków za przyznanie punktów w niektórych przypadkach podano przykładowe zapisy (lub przykładowe zapisy równoważne), które spełniają te warunki <u>w minimalnym stopniu</u>.

[3] Przykładowe rozwiązania mogą zawierać dodatkowe wyjaśnienia/komentarze, które nie podlegają ocenie. Wymagane elementy rozwiązania zdającego podlegające ocenie są wyszczególnione i opisane w kryteriach punktacji zasad oceniania. Dodatkowe komentarze w rozwiązaniu zamieszczono w celach dydaktycznych.

Zadanie 1.3. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.4) wykorzystuje związki pomiędzy położeniem, prędkością i przyspieszeniem w ruchu jednostajnym i jednostajnie zmiennym do obliczania parametrów ruchu; 1.5) rysuje i interpretuje wykresy zależności parametrów ruchu od czasu; 1.6) oblicza parametry ruchu podczas swobodnego spadku i rzutu pionowego.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1.)
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek h_max-metoda
Poprawna metoda obliczenia h_{max}, tzn. skorzystanie ze związku między drogą a czasem i przyśpieszeniem grawitacyjnym w spadku swobodnym (od punktu W do B) bez prędkości początkowej, **oraz** uwzględnienie, że $t_{WB} = 1$ s, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_{max} = \frac{1}{2} g t_{WB}^2 \qquad \text{oraz} \qquad t_{WB} = 1\ \mathrm{s}$$

Warunek Δh-metoda
Poprawna **metoda 1.** obliczenia różnicy wysokości Δh_{WA}, tzn. skorzystanie ze związku między drogą a czasem i przyśpieszeniem grawitacyjnym w spadku swobodnym (od punktu W do A) bez prędkości początkowej, **oraz** uwzględnienie, że $t_{WA} = 0{,}8$ s, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta h_{WA} = \frac{1}{2} g t_{WA}^2 \qquad \text{oraz} \qquad t_{WA} = 0{,}8\ \mathrm{s}$$

ALBO

Poprawna **metoda 2.** (zobacz *Uwaga* przy kroku 2. w sposobie 1. rozwiązania) obliczenia różnicy wysokości Δh_{AW}, tzn. skorzystanie ze związku między drogą a prędkością początkową, czasem i przyśpieszeniem grawitacyjnym w rzucie pionowym (od punktu A do punktu W), **oraz** uwzględnienie, że $t_{AW} = 0{,}8$ s, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta h_{AW} = v_0 t_{AW} - \frac{1}{2} g t_{AW}^2 \qquad \text{oraz} \qquad t_{AW} = 0{,}8\ \mathrm{s}$$

Warunek h_0-metoda
Zapisanie równania wskazującego na strategię rozwiązania, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_0 = h_{max} - \Delta h_{AW}$$

Schemat punktowania (dla rozwiązania sposobem 1.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunków: **h_max-metoda oraz Δh-metoda oraz h_0-metoda**

LUB

– spełnienie warunków: **h_max-metoda oraz h_0-metoda oraz** podanie prawidłowej wartości $h_{max} \approx 4{,}9\ \mathrm{m}$

LUB

– spełnienie warunków: **Δh-metoda oraz h_0-metoda oraz** podanie prawidłowej wartości $\Delta h \approx 3{,}1\ \mathrm{m}$

LUB

– spełnienie warunków: **Δh-metoda oraz h_max-metoda oraz** podanie prawidłowej wartości dla $\Delta h \approx 3{,}1\ \mathrm{m}$ lub $h_{max} \approx 4{,}9\ \mathrm{m}$.

1 pkt – spełnienie warunku **h_max-metoda**

LUB

– spełnienie warunku **Δh-metoda**

LUB

– spełnienie warunku **h_0-metoda**

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – poprawne zapisanie kinematycznego równania ruchu dla ciała C **oraz** zapisanie/uwzględnienie warunków, że $h = 0$ dla $t_{AB} = 1{,}8\ \mathrm{s}$, **oraz** $v_0 = gt_{AW}$, np.:

$$0 = h_0 + gt_{AW}t_{AB} - \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

1 pkt – poprawne zapisanie kinematycznego równania ruchu dla ciała C, np.:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 3.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** zapisanie/uwzględnienie warunków, że $h = 0$ dla $t_{A'B} = 0{,}2\ \mathrm{s}$ (A' jest punktem symetrycznym do A), **oraz** $v_0 = gt_{AW}$, np.:

$$0 = h_0 - \left(gt_{AW} \cdot 0{,}2 + \frac{1}{2}g \cdot 0{,}2^2\right) \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

1 pkt – poprawne zapisanie kinematycznego równania ruchu (jednostajnie przyśpieszonego) dla ciała C, licząc czas od momentu gdy osiągnie z powrotem wysokość h_0, np.:

$$h(t) = h_0 - s(t) = h_0 - \left(v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\right) \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 4.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** zapisanie/uwzględnienie warunku, że $v_0 = gt_{AW}$, **oraz** poprawna metoda obliczenia h_{max}, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_0 = h_{max} - \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{oraz} \quad v_0 = gt_{AW} \quad \text{oraz} \quad h_{max} = \frac{1}{2}gt_{WB}^2$$

1 pkt – poprawne zapisanie równania zasady zachowania energii mechanicznej (lub z równań ruchu z wyeliminowanym czasem), np. zapisy równoważne poniższym:

$$h_0 = h_{max} - \frac{v_0^2}{2g}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 5.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości h_0, z której wyrzucono pionowo w górę ciało C, **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $h_0 \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$

2 pkt – spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** podstawienie do równania paraboli współrzędnych punktów A i B **oraz** wyznaczenie zależności między h_0 i h_{max}, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\begin{cases} h_0 = k(0 - 0{,}8)^2 + h_{max} \\ 0 = k(1{,}8 - 0{,}8)^2 + h_{max} \end{cases} \quad \rightarrow \quad h_0 = 0{,}36h_{max}$$

LUB

– spełnienie warunku za 1 pkt **oraz** podstawienie do równania paraboli współrzędnych punktów A i B **oraz** poprawna metoda wyznaczenia h_{max}, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\begin{cases} h_0 = k(0 - 0{,}8)^2 + h_{max} \\ 0 = k(1{,}8 - 0{,}8)^2 + h_{max} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad h_{max} = \frac{1}{2}gt_{WB}^2$$

1 pkt – zapisanie równania paraboli (której fragment jest wykresem $h(t)$) w postaci kanonicznej z podstawionymi współrzędnymi wierzchołka W, np. zapisy równoważne poniższym:

$$h(t) = k(t - 0{,}8)^2 + h_{max}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Określimy strategię postępowania:

Krok 1. Obliczymy h_{max}.

Krok 2. Obliczymy Δh_{AW}. Skorzystamy z symetrii w czasie między wznoszeniem swobodnym w rzucie pionowym a spadkiem swobodnym bez prędkości początkowej (oba ruchy z przyśpieszeniem grawitacyjnym):

$$\Delta h_{AW} = \Delta h_{WA} \quad \text{oraz} \quad t_{wznoszenia\,AW} = t_{spadania\,WA}$$

Krok 3. Obliczymy h_0. Skorzystamy z faktu, że $h_{max} = h_0 + \Delta h_{AW}$.

Krok 1. Obliczymy h_{max}. Skorzystamy ze związku między drogą (równą wysokości maksymalnej) a przyśpieszeniem (równym grawitacyjnemu) i czasem w ruchu jednostajnie przyśpieszonym. Czas opadania od punktu W do B określimy na podstawie wykresu:

$$h_{max} = \frac{1}{2}gt_{WB}^2 \quad \text{gdzie} \quad t_{WB} = t_B - t_W = 1{,}8\ \mathrm{s} - 0{,}8\ \mathrm{s} = 1{,}0\ \mathrm{s}$$

$$h_{max} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\ \mathrm{s})^2 = 4{,}905\ \mathrm{m}$$

Krok 2. Obliczymy Δh_{AW}:

$$\Delta h_{AW} = \Delta h_{WA} \quad \text{oraz} \quad t_{wznoszenia\ AW} = t_{spadania\ WA} = 0{,}8\ \mathrm{s}$$

$$\Delta h_{WA} = \frac{1}{2}gt_{spadania\ WA}^2$$

$$\Delta h_{WA} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s})^2 = 3{,}1392\ \mathrm{m} \quad \text{zatem} \quad \Delta h_{AW} = 3{,}1392\ \mathrm{m}$$

Uwaga! Krok 2. można zrealizować drugą metodą, z wykorzystaniem równań ruchu dla rzutu pionowego w górę oraz z obliczonej wcześniej prędkości początkowej:

$$\Delta h_{AW} = v_0 t_{AW} - \frac{1}{2}gt_{AW}^2 = 7{,}848\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}8\ \mathrm{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s})^2 = 3{,}1392\ \mathrm{m}$$

Krok 3. Obliczymy h_0:

$$h_0 = h_{max} - \Delta h_{AW}$$

$$h_0 = 4{,}905\ \mathrm{m} - 3{,}1392\ \mathrm{m} = 1{,}7658\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 2.

Skorzystamy z równania ruchu jednostajnie opóźnionego ciała C, z położeniem początkowym h_0, prędkością początkową v_0 i przyśpieszeniem grawitacyjnym g:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Zauważmy, że dla $t = t_{AB}$ mamy $h = 0$, ponadto $v_0 = gt_{AW}$:

$$0 = h_0 + v_0 t_{AB} - \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \quad \text{oraz} \quad v_0 = gt_{AW}$$

$$0 = h_0 + gt_{AW}t_{AB} - \frac{1}{2}gt_{AB}^2$$

Obliczymy h_0. Z wykresu odczytamy czasy t_{AW} oraz t_{AB} i podstawimy do powyższego równania:

$$0 = h_0 + 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s}) \cdot (1{,}8\ \mathrm{s}) - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1{,}8\ \mathrm{s})^2$$

$$h_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1{,}8\ \mathrm{s})^2 - 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}8\ \mathrm{s}) \cdot (1{,}8\ \mathrm{s})$$

$$h_0 = 1{,}7658\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 3.

Skorzystamy z równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego ciała C, licząc czas t od momentu, gdy osiągnie z powrotem wysokość h_0 w chwili $t_{A'} = 1{,}6\ \mathrm{s}$ (na wykresie jest to punkt A' symetryczny do punktu A). Prędkość początkowa tego ruchu ma wartość v_0 i jest skierowana w dół. Zapiszemy równanie ruchu jednostajnie przyśpieszonego z przyśpieszeniem o wartości g:

$$h(t) = h_0 - s(t) = h_0 - \left(v_0 t + \frac{1}{2} g t^2\right)$$

Zauważmy, że dla $t = t_{A'B} = 0{,}2\ \mathrm{s}$ mamy $h = 0$, ponadto $v_0 = g t_{AW}$:

$$0 = h_0 - \left(v_0 \cdot 0{,}2\ \mathrm{s} + \frac{1}{2} g \cdot (0{,}2\ \mathrm{s})^2\right) \quad \text{oraz} \quad v_0 = g t_{AW} = 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$h_0 = 7{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}2\ \mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}2\ \mathrm{s})^2$$

$$h_0 = 1{,}7662\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 4.

Zapiszemy równanie wynikające z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$g h_{max} = \frac{v_0^2}{2} + g h_0 \quad \rightarrow \quad h_0 = h_{max} - \frac{v_0^2}{2g}$$

Wyznaczymy h_{max} oraz v_0:

$$h_{max} = \frac{1}{2} g t_{WB}^2 \quad \text{oraz} \quad v_0 = g t_{AW}$$

Z powyższych równań wynika:

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_{WB}^2 - \frac{1}{2} g t_{AW}^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot (1^2 - 0{,}8^2)\ \mathrm{m} = 1{,}7658\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Sposób 5.

Wyznaczymy równanie paraboli, której fragment jest wykresem zależności $h(t)$. Skorzystamy z postaci kanonicznej równania paraboli. Współczynnik wiodący równania paraboli oznaczymy jako k. Współrzędne wierzchołka to $W = (t_W;\ h_W) = (0{,}8\ ;\ h_{max})$ zatem:

$$1)\ h(t) = k(t - t_w)^2 + h_W \quad \rightarrow \quad 2)\ \ h(t) = k(t - 0{,}8)^2 + h_{max}$$

Uwaga! W równaniach podstawiamy wartości liczbowe lub symbole odpowiednich wielkości bez wypisywania jednostek, przy czym zakładamy, że są to jednostki podstawowe układu SI.

Do równania 2) podstawimy współrzędne punktów A i B:

$$\begin{cases} A = (0; h_0) \ \rightarrow h(t) \\ B = (1{,}8\ ; 0) \rightarrow h(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h_0 = k(0 - 0{,}8)^2 + h_{max} \\ 0 = k(1{,}8 - 0{,}8)^2 + h_{max} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_0 = 0{,}64k + h_{max} \\ 0 = k \cdot 1^2 + h_{max} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h_0 = 0{,}64 \cdot (-h_{max}) + h_{max} \\ k = -h_{max} \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} h_0 = 0{,}36 h_{max} \\ k = -h_{max} \end{cases}$$

- Przykładowy sposób 1. prowadzenia dalszego rachunku

Na podstawie równania ruchu jednostajnego opóźnionego: $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$, zauważamy, że współczynnik wiodący równania paraboli wynosi $k = -\frac{a}{2}$. Zatem:

$$\begin{cases} h_0 = 0{,}36 h_{max} \\ -\frac{g}{2} = -h_{max} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h_0 = 0{,}36 \cdot \frac{g}{2} \\ h_{max} = \frac{g}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h_0 = 1{,}7685\ \mathrm{m} \approx 1{,}77\ \mathrm{m} \\ h_{max} = 4{,}905\ \mathrm{m} \end{cases}$$

- Przykładowy sposób 2. prowadzenia dalszego rachunku

Obliczymy h_{max} ze wzoru na wysokość w spadku swobodnym:

$$h_{max} = \frac{1}{2} g t_{WB}^2 \quad \rightarrow \quad h_{max} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\ \mathrm{s})^2 = 4{,}905\ \mathrm{m}$$

Zatem:

$$h_0 = 0{,}36 h_{max} = 0{,}36 \cdot 4{,}905\ \mathrm{m} \approx 1{,}77\ \mathrm{m}$$

Zadanie 2.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.1) rozróżnia wielkości wektorowe od skalarnych […]; 1.14) […] opisuje wektory prędkości i przyspieszenia dośrodkowego.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne wyznaczenie konstrukcyjne położenia środka S okręgu **oraz** wpisanie prawidłowej wartości liczbowej dla długości promienia okręgu.

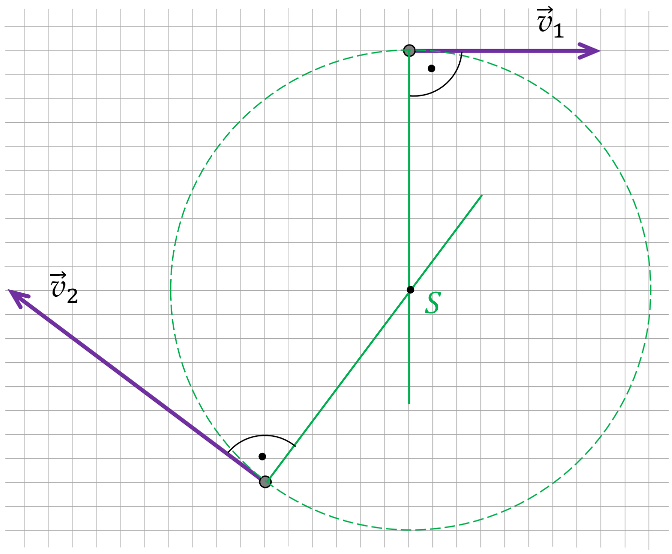
1 pkt – poprawna (co do zasady) metoda przeprowadzenia konstrukcji położenia środka S okręgu za pomocą prostych prostopadłych do wektorów prędkości (albo symetralnej odcinka łączącego początki wektorów prędkości i prostej prostopadłej do jednego z wektorów prędkości)

LUB

– poprawne oznaczenie położenia środka S okręgu bez konstrukcji **oraz** wpisanie prawidłowej wartości liczbowej dla długości promienia okręgu.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie



l = ...10.... długości kratek

Zadanie 2.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.3) (G) podaje przykłady sił i rozpoznaje je w różnych sytuacjach praktycznych; 1.9) (G) posługuje się pojęciem siły ciężkości. 1.8) wyjaśnia ruch ciał na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona; 1.13) składa i rozkłada siły działające wzdłuż prostych nierównoległych; 1.14) […] opisuje wektory prędkości i przyspieszenia dośrodkowego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 2.3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.3) (G) podaje przykłady sił i rozpoznaje je w różnych sytuacjach praktycznych; 1.9) (G) posługuje się pojęciem siły ciężkości. 1.8) wyjaśnia ruch ciał na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona; 1.13) składa i rozkłada siły działające wzdłuż prostych nierównoległych; 1.14) […] opisuje wektory prędkości i przyspieszenia dośrodkowego. 3.2) oblicza wartość energii kinetycznej i potencjalnej ciał w jednorodnym polu grawitacyjnym; 3.3) wykorzystuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczania parametrów ruchu.

Zasady oceniania

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek SIŁY_MAX

Zapisanie związku między wartością siły wypadkowej (dośrodkowej) działającej na ciało $\mathcal{B}$ w najniższym położeniu a maksymalną wartością siły reakcji nici i wartością siły grawitacji, np. zapisy równoważne poniższym:

$$F_{do\ max} = F_{n\ max} - F_g$$

Warunek SIŁY_MIN

Zapisanie związku między wartością siły wypadkowej (dośrodkowej) działającej na ciało $\mathcal{B}$ w najwyższym położeniu a minimalną wartością siły reakcji nici i wartością siły grawitacji, np. zapisy równoważne poniższym:

$$F_{do\ min} = F_{n\ min} + F_g$$

Uwaga! W przypadku rozwiązania zadania w układzie nieinercjalnym wszystkie warunki i wzory pozostają analogiczne z tą różnicą, że zamiast siły wypadkowej pełniącej rolę dośrodkowej rozważa się „siłę” odśrodkową (bezwładności) i zamiast II zasady dynamiki rozważa się równowagę sił (łącznie z „siłą” odśrodkową).

Warunek SIŁY_MAX+WZORY

Spełnienie warunku **SIŁY_MAX** **oraz** zastosowanie wzoru na wartość siły dośrodkowej (zastosowanie II zasady dynamiki) z uwzględnieniem prędkości maksymalnej v_{max} i zastosowanie wzoru na wartość siły grawitacji: np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{max}^2}{l} = F_{n\ max} - mg$$

Warunek SIŁY_MIN+WZORY
Spełnienie warunku **SIŁY_MIN** **oraz** zastosowanie wzoru na wartość siły dośrodkowej (zastosowanie II zasady dynamiki) z uwzględnieniem prędkości minimalnej v_{min} i zastosowanie wzoru na wartość siły grawitacji: np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{min}^2}{l} = F_{n\,min} + mg$$

Warunek ZZE
Zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej w najniższym i najwyższym położeniu ciała $\mathcal{B}$ **oraz** uwzględnienie w tym równaniu prędkości v_{min}, v_{max} we wzorach na energie kinetyczne i uwzględnienie różnicy wysokości $2l$ we wzorze na energię potencjalną, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mv_{min}^2}{2} + mg2l$$

Warunek ZZE+ZALEŻNOŚĆ
Spełnienie warunku **ZZE** **oraz** wykorzystanie związku $\frac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3}$, **oraz** wyprowadzenie zależności między v_{max} albo v_{min} a iloczynem gl, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mv_{min}^2}{2} + mg2l \quad \text{oraz} \quad \frac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3}\right) \rightarrow \left(v_{min} = \sqrt{2gl} \quad \text{albo} \quad v_{max} = \sqrt{6gl}\right)$$

Schemat punktowania
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu sił reakcji nici **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego: $\frac{F_{n\,max}}{F_{n\,min}} = 7$
3 pkt – spełnienie warunków:
SIŁY_MAX+WZORY oraz SIŁY_MIN+WZORY oraz ZZE+ZALEŻNOŚĆ
2 pkt – spełnienie warunków: **SIŁY_MAX+WZORY oraz SIŁY_MIN+WZORY**
LUB
– spełnienie warunku **ZZE+ZALEŻNOŚĆ**
LUB
– spełnienie warunków: **SIŁY_MAX oraz SIŁY_MIN oraz ZZE**
LUB
– spełnienie warunków: **(SIŁY_MAX+WZORY albo SIŁY_MIN+WZORY) oraz ZZE**
1 pkt – spełnienie warunku **SIŁY_MAX**
LUB
– spełnienie warunku **SIŁY_MIN**
LUB
– spełnienie warunku **ZZE**
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Zagadnienie rozwiążemy w inercjalnym układzie odniesienia. Siła reakcji nici działająca na ciało $\mathcal{B}$ podczas ruchu po okręgu ma największą wartość, gdy przechodzi ono przez najniższe położenie (gdzie ma największą prędkość), a najmniejszą wartość – gdy przechodzi ono przez najwyższe położenie (gdzie ma najmniejszą prędkość).

Siła reakcji nici ma kierunek wzdłuż nici i zwrot do środka okręgu. Zatem siła wypadkowa działająca na ciało $\mathcal{B}$ w górnym i dolnym położeniu ma charakter siły dośrodkowej i wiąże się z siłą reakcji nici i siłą grawitacji działającą na $\mathcal{B}$ następująco:

$$1)\quad \begin{cases} F_{do\,max} = F_{n\,max} - F_g \\ F_{do\,min} = F_{n\,min} + F_g \end{cases}$$

Zastosujemy wzór na siłę dośrodkową (równoważnie: II zasadę dynamiki i wzór na przyśpieszenie dośrodkowe):

$$2)\quad \begin{cases} m\dfrac{v_{max}^2}{l} = F_{n\,max} - mg \\ m\dfrac{v_{min}^2}{l} = F_{n\,min} + mg \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2a)\quad \begin{cases} F_{n\,max} = \dfrac{mv_{max}^2}{l} + mg \\ F_{n\,min} = \dfrac{mv_{min}^2}{l} - mg \end{cases}$$

Określimy związek między maksymalną a minimalną wartością prędkości na podstawie zasady zachowania energii mechanicznej. Energia mechaniczna w najwyższym położeniu jest równa energii mechanicznej w najniższym położeniu. Ponadto wykorzystamy związek między tymi prędkościami podany w treści zadania. Z tych zależności wyznaczymy prędkości maksymalną i minimalną w funkcji g oraz l:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{mv_{max}^2}{2} = \dfrac{mv_{min}^2}{2} + mg2l \\ \dfrac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$3a)\quad \begin{cases} \dfrac{m(3v_{min}^2)}{2} = \dfrac{mv_{min}^2}{2} + mg2l \\ \dfrac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad 3b)\quad \begin{cases} v_{min} = \sqrt{2gl} \\ v_{max} = \sqrt{6gl} \end{cases}$$

Wartości prędkości otrzymane w pkt 3b) podstawimy do pkt 2a):

$$4)\quad \begin{cases} F_{n\,max} = \dfrac{m(6gl)}{l} + mg \\ F_{n\,min} = \dfrac{m(2gl)}{l} - mg \end{cases} \quad \rightarrow \quad 4a)\quad \begin{cases} F_{n\,max} = 7mg \\ F_{n\,min} = mg \end{cases}$$

Zapiszemy rozwiązanie:

$$5)\quad \frac{F_{n\,max}}{F_{n\,min}} = 7$$

Zadanie 3.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 2.3) oblicza momenty sił; 2.4) analizuje równowagę brył sztywnych, w przypadku gdy siły leżą w jednej płaszczyźnie (równowaga sił i momentów sił).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 3.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 2.3) oblicza momenty sił; 2.6) opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi przechodzącej przez środek masy […]; 2.7) analizuje ruch obrotowy bryły sztywnej pod wpływem momentu sił; *ALBO* 2.9) uwzględnia energię kinetyczną ruchu obrotowego w bilansie energii. 3.3) wykorzystuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczania parametrów ruchu.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1. albo 3.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości F siły działającej na bloczek **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na F:

$F = \frac{1}{2}g\left(m_c - \frac{1}{2}m_w\right)$ (lub przekształconego równoważnie)

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt z pierwszego myślnika **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności bloczka, np. zapisy równoważne poniższym:

$m_c a = F_g - F_n$ oraz $\frac{1}{2}m_w R^2 \frac{a}{R} = RF_n - RF$

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 3.) spełnienie warunku za 2 pkt opisanego przy trzecim myślniku **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności walca i „doklejonego” ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$\left(\frac{1}{2}m_w R^2 + m_c R^2\right)\frac{a}{R} = m_c gR - FR$

2 pkt – zapisanie poprawnych dwóch równań wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka i ruchu obrotowego bloczka **oraz** uwzględnienie w nich poprawnych wyrażeń opisujących wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek i wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np.:

$m_c a = F_g - F_n$ oraz $I_0 \epsilon = RF_n - RF$ (lub zapisy równoważne)

LUB

– zapisanie dwóch równań wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka i ruchu obrotowego bloczka, uwzględniających odpowiednie siły, z błędem znaku przy sile wypadkowej lub wypadkowym momencie sił (tzn. błędny znak może być w obu) **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności bloczka

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 3.) zapisanie jednego równania wyrażającego II zasadę dynamiki ruchu obrotowego układu zastępczego walec–ciężarek (bez nici), w chwili, gdy ciężarek (jako punkt materialny) jest na poziomie osi walca i jest „doklejony” do walca **oraz** uwzględnienie sumarycznego momentu bezwładności układu względem osi walca **oraz** uwzględnienie poprawnego momentu sił działających na układ walec–ciężarek, np. zapisy równoważne poniższym:

$(I_0 + I_c)\epsilon = F_g R - FR$

1 pkt – zapisanie poprawnego równania wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka z uwzględnieniem masy m_c cieżarka **oraz** zapisanie równania wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bloczka z uwzględnieniem momentu bezwładności I_0 bloczka, np. zapisy równoważne poniższym

$m_c a = F_w$ oraz $I_0 \epsilon = M$

Uwaga! W tym warunku nie wymaga się poprawnego rozpisania F_w i M.

LUB

– zapisanie poprawnego wyrażenia na wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek **oraz** zapisanie poprawnego wyrażenia na wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np. zapisy równoważne poniższym:

$F_w = F_g - F_n$ oraz $M = RF_n - RF$

Uwaga! W tym warunku nie wymaga się równań II zasady dynamiki.

LUB

– zapisanie poprawnego równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek, np.:

$m_c a = F_g - F_n$ (lub zapisy równoważne)

LUB

– zapisanie poprawnego równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bloczka względem osi symetrii **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np. zapisy równoważne poniższym:

$I_0 \epsilon = RF_n - RF$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości F siły działającej na bloczek **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na F:

$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$ (lub przekształconego równoważnie)

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności bloczka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyśpieszonym ciężarka bez prędkości początkowej, np. zapisy równoważne poniższym:

$\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_w R^2 \frac{v^2}{R^2} - m_c g h = -Fh$ oraz $v^2 = 2ah$

albo

$m_c a h + \frac{1}{2} m_w a h - m_c g h = -Fh$

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej **oraz** zastosowanie wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego ciężarka, ruchu obrotowego bloczka i energię potencjalną ciężarka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością liniową ciężarka a prędkością kątową bloczka, np. zapisy równoważne poniższym:

$\left(\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 - m_c g h = -Fh \quad \text{oraz} \quad v = \omega R \right)$

albo w jednym równaniu

$\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I_0 \frac{v^2}{R^2} - m_c g h = -Fh$

LUB

– zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej, uwzględniającego odpowiednie rodzaje energii i wzory na te energie, z błędem znaku przy energiach albo/i pracy **oraz** zastosowanie związku między prędkością liniową ciężarka a prędkością kątową bloczka **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności bloczka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyśpieszonym ciężarka bez prędkości początkowej.

1 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej **oraz** uwzględnienie (poprzez oznaczenie) w tym równaniu zmiany energii kinetycznej ciężarka, zmiany energii kinetycznej ruchu obrotowego walca i zmiany energii potencjalnej ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta E_{pot\ c} + \Delta E_{kin\ post\ c} + \Delta E_{kin\ obr\ w} = W_F$$

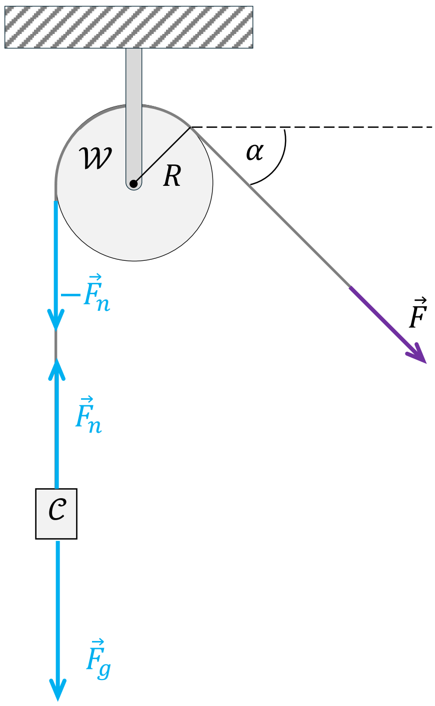
albo zapis w postaci przyrównania energii

$$E_{kin\ końc\ post\ c} + E_{kin\ końc\ obr\ w} + E_{pot\ końc\ c} = E_{pot\ pocz\ c} - |W_F|$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasad dynamiki)



Na ciężarek $\mathcal{C}$ działają dwie siły: siła reakcji nici $\vec{F}_n$ oraz siła grawitacji $\vec{F}_g$. Ponieważ ciężarek przyśpiesza w dół, to siła wypadkowa działająca na ciężarek ma kierunek pionowy i zwrot w dół. Wartość tej siły wypadkowej jest opisana wyrażeniem:

$$F_w = F_g - F_n$$

Na bloczek $\mathcal{W}$ działają dwa momenty sił: $\vec{M}_n$ – moment siły reakcji nici $\vec{F}_n$ oraz $\vec{M}_F$ – moment siły $\vec{F}$. Wypadkowy moment siły działający na bloczek jest opisany wyrażeniem:

$$M = RF_n - RF$$

Zapiszemy równania wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka $\mathcal{C}$ oraz dla ruchu obrotowego bloczka $\mathcal{W}$ (względem osi symetrii):

$$\begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ I_0 \epsilon = RF_n - RF \end{cases}$$

Ruch przyśpieszony ciężarka $\mathcal{C}$ przekłada się na ruch obrotowy z przyśpieszeniem kątowym bloczka $\mathcal{W}$. Zastosujemy związek $a = \epsilon R$ między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka. Ponadto wykorzystamy wzór na I_0:

$$\begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ \frac{1}{2} m_w R^2 \cdot \frac{a}{R} = RF_n - RF \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ \frac{1}{2} m_w a = F_n - F \end{cases}$$

$$m_c a + \frac{1}{2} m_w a = m_c g - F \quad \rightarrow \quad F = m_c g - m_c a - \frac{1}{2} m_w a$$

Wykorzystamy warunek zadania: $a = \frac{1}{2}g$, zatem:

$$F = m_c g - m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} m_w \cdot \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} m_c g - \frac{1}{4} m_w g$$

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$

Sposób 2. (zastosowanie twierdzenia o pracy i zmianie energii mechanicznej)

Zastosujemy twierdzenie o zmianie energii mechanicznej układu i pracy siły niepotencjalnej działającej na układ: zmiana energii mechanicznej układu jest równa pracy siły niepotencjalnej. Siła $\vec{F}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu ruchu, zatem jej praca jest ujemna:

$$\Delta E_{mech} = -|W_F|$$

Zmianę energii mechanicznej rozpiszemy na zmianę energii potencjalnej układu i zmianę energii kinetycznej układu (ciężarka i bloczka):

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = -|W_F|$$

$$\Delta E_{pot\ c} + \Delta E_{pot\ w} + \Delta E_{kin\ post\ c} + \Delta E_{kin\ obr\ w} = -|W_F|$$

Prędkości liniowa ciężarka i kątowa bloczka na początku ruchu są równe 0. Te prędkości w stanie końcowym oznaczymy – odpowiednio – jako v oraz ω. Załóżmy, że między stanem początkowym a końcowym ciężarek przebył drogę h. Na takiej też drodze siła $\vec{F}$ wykonuje pracę. Zatem:

$$m_c g(0 - h) + 0 + \left(\frac{1}{2} m_c v^2 - 0\right) + \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2 - 0\right) = -Fh$$

Ruch postępowy ciężarka przekłada się na ruch obrotowy bloczka, więc wykorzystamy związek $v = \omega R$ i wzór na moment bezwładności bloczka:

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_w R^2 \frac{v^2}{R^2} = -Fh$$

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{4} m_w v^2 = -Fh$$

Wykorzystamy związek $v^2 = 2ah$ wynikający z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego:

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c 2ah + \frac{1}{4} m_w 2ah = -Fh$$

$$-m_c gh + m_c ah + \frac{1}{2} m_w ah = -Fh$$

Wykorzystamy związek $a = \frac{1}{2}g$, podany w treści zadania:

$$-m_c gh + m_c \frac{1}{2} gh + \frac{1}{2} m_w \frac{1}{2} gh = -Fh$$

$$-m_c g + m_c \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} m_w \frac{1}{2} g = -F$$

$$F = m_c g - m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{4} m_w\, g = m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{4} m_w\, g$$

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$

Sposób 3. (zastosowanie układu zastępczego)
Rozważamy układ zastępczy, którego „chwilowa” dynamika jest równoważna dynamice układu opisanego w zadaniu. Załóżmy, że ciężarek jest „doklejony” do walca i znajduje się na wysokości osi walca. Ciężarek traktujemy jako punkt materialny.

Analizujemy „chwilowe” równanie ruchu obrotowego układu. Na taki układ działają momenty dwóch sił: siły $\vec{F}$ oraz siły $\vec{F}_g$ ciężkości „doklejonego” ciężarka. Chwilowy moment bezwładności układu jest sumą momentów bezwładności walca oraz ciężarka.

Zapiszemy chwilowe równanie ruchu obrotowego dla takiego układu:

$$(I_0 + I_c)\epsilon = F_g R - FR$$

Podstawimy odpowiednie wzory, wykonamy przekształcenia i wyznaczymy F:

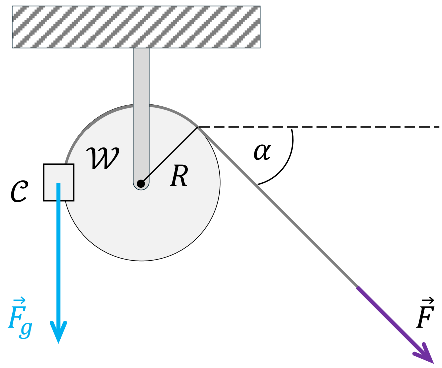
$$\left(\frac{1}{2}m_w R^2 + m_c R^2\right)\frac{a}{R} = m_c g R - FR$$

$$\frac{1}{2}m_w a + m_c a = m_c g - F$$

$$\frac{1}{2}m_w \frac{1}{2}g + m_c \frac{1}{2}g = m_c g - F$$

$$\frac{1}{4}m_w g - \frac{1}{2}m_c g = -F$$

$$F = \frac{1}{2}m_c g - \frac{1}{4}m_w g = \frac{1}{2}g\left(m_c - \frac{1}{2}m_w\right)$$



Zadanie 4.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 6.4) (G) posługuje się pojęciami: amplitudy, okresu i częstotliwości, prędkości i długości fali do opisu fal harmonicznych oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami. 6.8) stosuje w obliczeniach związek między parametrami fali: długością, częstotliwością, okresem, prędkością.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia częstotliwości fali **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $f \approx 1{,}3 \cdot 10^5\ \mathrm{Hz}$

1 pkt – zauważenie i zapisanie/wykorzystanie zależności $\Delta x_{ab} = 9\lambda_1$ **oraz** zapisanie/zastosowanie wzoru na prędkość fali (lub proporcji $\Delta t \propto \Delta x$ z niej wynikającej), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta x_{ab} = 9\lambda_1 \quad \text{oraz} \quad \left(v_1 = \frac{\Delta x_{ab}}{\Delta t_{ab}} \quad \text{albo} \quad v_1 = \frac{\lambda_1}{T}\right)$$

albo w jednym zapisie

$$T = \frac{\Delta t_{ab}}{9}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że odległość od odcinka a do b jest równa dziewięciu długościom fali:

$$\Delta x_{ab} = 9\lambda_1$$

Prędkość fali można wyrazić wzorami:

$$v_1 = \frac{\lambda_1}{T} \quad \text{oraz} \quad v_1 = \frac{\Delta x_{ab}}{\Delta t_{ab}}, \quad \text{skąd wynika, że} \quad \frac{\Delta x_{ab}}{\lambda_1} = \frac{\Delta t_{ab}}{T}$$

Z powyższego wynika, że:

$$\Delta t_{ab} = 9T \quad \rightarrow \quad T = \frac{0{,}07\ \mathrm{ms}}{9} = \frac{7}{9} \cdot 10^{-2}\ \mathrm{ms} = 0,(7) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{ms}$$

Zatem:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{9}{7} \cdot 10^5\ \mathrm{Hz} \approx 1{,}29 \cdot 10^5\ \mathrm{Hz} = 129\ \mathrm{kHz}$$

Zadanie 4.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 6.4) (G) posługuje się pojęciami: amplitudy, okresu i częstotliwości, prędkości i długości fali do opisu fal harmonicznych oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami. 6.8) stosuje w obliczeniach związek między parametrami fali: długością, częstotliwością, okresem, prędkością.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 4.3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 6.4) (G) posługuje się pojęciami: amplitudy, okresu i częstotliwości, prędkości i długości fali do opisu fal harmonicznych oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami. 6.11) wyjaśnia zjawisko ugięcia fali w oparciu o zasadę Huygensa.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 4.4. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 6.4) (G) posługuje się pojęciami: amplitudy, okresu i częstotliwości, prędkości i długości fali do opisu fal harmonicznych oraz stosuje do obliczeń związki między tymi wielkościami. 6.9) opisuje załamanie fali na granicy ośrodków.

Zasady oceniania
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek K – poprawne dorysowanie kierunku biegu fali $\mathcal{F}$ w ośrodku $\mathcal{O}_2$, tzn. dorysowanie prostej, będącej kontynuacją linii k w ośrodku $\mathcal{O}_2$, w obszarze między liniami przerywanymi znajdującymi w ośrodku $\mathcal{O}_2$.

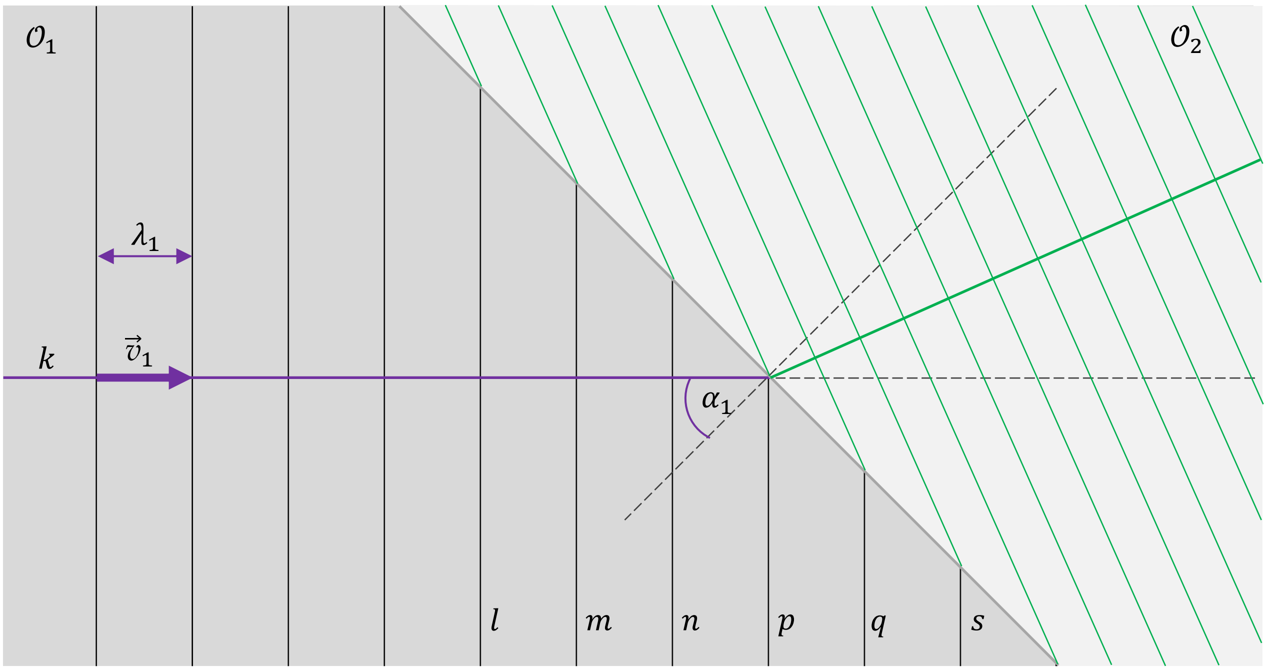
Warunek IDF – wpisanie prawidłowej wartości ilorazu długości fal: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$

Warunek PF – poprawne dorysowanie powierzchni falowych fali $\mathcal{F}$ w ośrodku $\mathcal{O}_2$, tzn. dorysowanie prostych będących kontynuacjami w ośrodku $\mathcal{O}_2$ co najmniej trzech linii spośród l, m, n, p, q, s (odchylonych w lewo względem nich).

Uwaga! Ten warunek może być spełniony także bez narysowanego kierunku rozchodzenia się fali w ośrodku $\mathcal{O}_2$ (wystarczy narysowanie samych linii będących kontynuacjami l, m, n, p, q, s, które w $\mathcal{O}_2$ odchylają się w lewo).

Schemat punktowania
3 pkt – spełnienie trzech warunków: **K oraz IDF oraz PF**.
2 pkt – spełnienie dwóch warunków: (**K oraz IDF**) **albo** (**K oraz PF**) **albo** (**IDF oraz PF**).
1 pkt – spełnienie jednego warunku: **K albo IDF albo PF**.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie



$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \ldots 2 \ldots\ldots\ldots$$

Zadanie 5.1. (0–1)

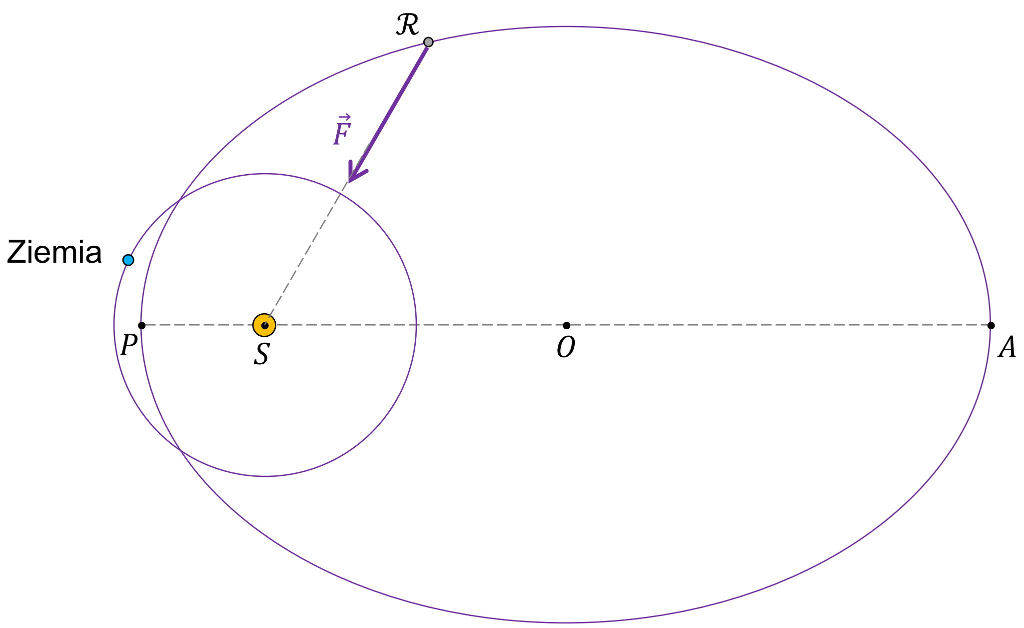
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.5) (P) wyjaśnia wpływ siły grawitacji Słońca na ruch planet […]. 4.2) rysuje linie pola grawitacyjnego, rozróżnia pole jednorodne od pola centralnego; 4.3) oblicza wartość i kierunek pola grawitacyjnego na zewnątrz ciała sferycznie symetrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne narysowanie wektora siły $\vec{F}$, tzn. narysowanie wektora zaczepionego w $\mathcal{R}$ i skierowanego wzdłuż odcinka $\mathcal{R}S$ w stronę S.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie



Zadanie 5.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków. IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 4.8) oblicza okresy obiegu planet i ich średnie odległości od gwiazdy, wykorzystując III prawo Keplera dla orbit kołowych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia okresu obiegu dookoła Słońca planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego w latach ziemskich: $T_{\mathcal{R}} \approx 4{,}7 \text{ roku}$

1 pkt – zapisanie równania III prawa Keplera (dla planetoidy $\mathcal{R}$ i Ziemi), z uwzględnieniem (np. poprzez oznaczenia lub podanie wartości danych liczbowych) okresów obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ i Ziemi dookoła Słońca, półosi wielkiej orbity planetoidy $\mathcal{R}$, promienia orbity Ziemi, **oraz** poprawna metoda wyznaczenia długości półosi wielkiej orbity planetoidy $\mathcal{R}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(\frac{T_{\mathcal{R}}^2}{a_{\mathcal{R}}^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} \quad \text{albo} \quad \frac{T_{\mathcal{R}}^2}{a_{\mathcal{R}}^3} = \frac{(1\text{ rok})^2}{(1\text{ au})^3}\right) \text{ oraz } \left(a_{\mathcal{R}} = \frac{|PA|}{2} \text{ albo oznaczenie } a_{\mathcal{R}} \text{ na osi}\right)$$

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 2.) powołanie się na równość okresów obiegu dookoła Słońca planetoidy $\mathcal{R}$ i ciała $\mathcal{C}$ poruszającego się po orbicie kołowej o promieniu równym $r_{\mathcal{C}} = a_{\mathcal{R}}$ **oraz** zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji działającą na ciało $\mathcal{C}$ jako siłę dośrodkową (lub relacji identyfikującej przyśpieszenie dośrodkowe jako przyśpieszenie grawitacyjne), **oraz** uwzględnienie wzorów na te siły (lub przyśpieszenia) **oraz** uwzględnienie wzoru na prędkość liniową (lub kątową), np. zapisy równoważne poniższym:

$$(r_{\mathcal{C}} = a_{\mathcal{R}} \quad \text{oraz} \quad T_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{R}}) \quad \text{oraz} \quad \frac{m_{\mathcal{R}} v^2}{r_{\mathcal{C}}} = \frac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_{\mathcal{C}}^2} \quad \text{oraz} \quad v = \frac{2\pi r_{\mathcal{C}}}{T_{\mathcal{C}}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie III prawa Keplera)

Planetoida $\mathcal{R}$ oraz Ziemia obiegają wspólne centrum grawitacyjne – Słońce. Do obliczenia okresu obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ dookoła Słońca wykorzystamy III prawo Keplera:

$$\frac{T_{\mathcal{R}}^2}{a_{\mathcal{R}}^3} = \frac{T_Z^2}{a_Z^3} \quad \rightarrow \quad T_{\mathcal{R}} = \sqrt{\left(\frac{a_{\mathcal{R}}}{a_Z}\right)^3} \cdot T_Z$$

gdzie $a_{\mathcal{R}}$ jest długością półosi wielkiej orbity planetoidy $\mathcal{R}$, a_Z jest promieniem orbity Ziemi, $T_{\mathcal{R}}$ i T_Z są okresami obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ i Ziemi dookoła Słońca.

Wyznaczymy $a_{\mathcal{R}}$:

$$a_{\mathcal{R}} = \frac{|PA|}{2} = 2{,}81 \text{ au}$$

Podstawimy dane do równania wynikającego z III prawa Keplera:

$$T_{\mathcal{R}} = \sqrt{\left(\frac{2{,}81\ \mathrm{au}}{1\ \mathrm{au}}\right)^3} \cdot 1\ \mathrm{rok} \approx 4{,}7\ \mathrm{roku}$$

Sposób 2. (zastosowanie zasad dynamiki w ruchu po okręgu)

Uwaga! Poniżej przedstawiony sposób rozwiązania jest prawidłowy, jednak nie jest rekomendowany dla tego zadania, ponieważ nie jest optymalny (ze względu na użycie większej liczby zależności i konieczność przeliczenia na lata ziemskie).

Wykorzystamy metodę zastępczej orbity kołowej dla eliptycznej orbity planetoidy $\mathcal{R}$. Rozważmy ciało $\mathcal{C}$ poruszające się po orbicie kołowej o takim promieniu $r_{\mathcal{C}}$, który jest równy długości półosi wielkiej orbity eliptycznej planetoidy $\mathcal{R}$:

$$r_{\mathcal{C}} = a_{\mathcal{R}} \qquad \rightarrow \qquad r_{\mathcal{C}} = 2{,}81\ \mathrm{au}$$

Zgodnie z III prawem Keplera dla orbit kołowych i eliptycznych, okres obiegu ciała $\mathcal{C}$ dookoła Słońca jest równy okresowi obiegu planetoidy $\mathcal{R}$ dookoła Słońca:

$$T_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{R}}$$

Przy takim założeniu obliczymy $T_{\mathcal{C}}$ z wykorzystaniem II zasady dynamiki dla ruchu po okręgu. Funkcję siły dośrodkowej działającej na ciało $\mathcal{C}$ pełni siła grawitacji pochodząca od Słońca:

$$m_{\mathcal{C}}\left(\frac{2\pi}{T_{\mathcal{C}}}\right)^2 r_{\mathcal{C}} = \frac{GM_S m_{\mathcal{C}}}{r_{\mathcal{C}}^2} \qquad \rightarrow \qquad T_{\mathcal{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{{r_{\mathcal{C}}}^3}{GM_S}}$$

$$T_{\mathcal{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{(2{,}81 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}} \approx 14{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{s}$$

$$T_{\mathcal{R}} = T_{\mathcal{C}} = 14{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{s}$$

Wynik wyrazimy w latach ziemskich:

$$T_R \approx \frac{14{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{s}}{3{,}65 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{2+1+3}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{rok}}} \approx 4{,}7\ \mathrm{roku}$$

Zadanie 5.3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków. I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 1.8) wyjaśnia ruch ciał na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona. 4.1) wykorzystuje prawo powszechnego ciążenia do obliczenia siły oddziaływań grawitacyjnych między masami punktowymi i sferycznie symetrycznymi; 4.3) oblicza wartość i kierunek pola grawitacyjnego na zewnątrz ciała sferycznie symetrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 5.4. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków. IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 2.8) stosuje zasadę zachowania momentu pędu do analizy ruchu. ALBO 4.5) oblicza zmiany energii potencjalnej grawitacji i wiąże je z pracą lub zmianą energii kinetycznej.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie aphelium **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_A \approx 7{,}3\ \mathrm{km/s}$

2 pkt – zapisanie równości momentów pędu (względem środka Słońca) planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w tym równaniu prędkości planetoidy w punktach A, P i odległości od środka Słońca do punktów A, P, **oraz** prawidłowe wyznaczenie odległości od środka Słońca do punktu A, np. zapisy równoważne poniższym:

$m_{\mathcal{R}} v_A r_A = m_{\mathcal{R}} v_P r_P$ oraz $r_A = |PA| - r_P$

albo w jednym równaniu

$v_A(|PA| - r_P) = v_P r_P$

1 pkt – zapisanie równości momentów pędu (względem środka Słońca) planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w tym równaniu prędkości planetoidy w punktach A, P i odległości od środka Słońca do punktów A, P, np. zapisy równoważne poniższym:

$m_{\mathcal{R}} v_A r_A = m_{\mathcal{R}} v_P r_P$

LUB

– poprawna metoda obliczenia odległości od środka Słońca do punktu A (aphelium) orbity planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** wyznaczenie tej odległości (na symbolach lub liczbach), np. zapisy równoważne poniższym:

$(|PA| = r_P + r_A \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P)$ albo $r_A = 5{,}62\ \mathrm{au} - 0{,}81\ \mathrm{au} = 4{,}81\ \mathrm{au}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie aphelium **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_A \approx 7{,}3\ \mathrm{km/s}$

2 pkt – zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania energii mechanicznej **oraz** zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania momentu pędu dla planetoidy $\mathcal{R}$ (tzn. przyrównanie energii mechanicznych oraz momentów pędu planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach P i A), **oraz** wykorzystanie wzorów na energie mechaniczne i momenty pędu w punktach P i A, **oraz** poprawne wyprowadzenie wzoru na wartość prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie A, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\begin{cases} \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_A} \\ m_{\mathcal{R}} v_P r_P = m_{\mathcal{R}} v_A r_A \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_P}{r_A}}$$

LUB

– bezpośrednie zapisanie wzoru na prędkość planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity **oraz** prawidłowe wyznaczenie odległości od środka Słońca do punktu A, np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_P}{r_A}} \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P$$

1 pkt – zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania energii mechanicznej **oraz** zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania momentu pędu planetoidy $\mathcal{R}$ (tzn. przyrównanie energii mechanicznych oraz momentów pędu planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach P i A), np. zapisy równoważne poniższym:

$E_P = E_A$ oraz $L_P = L_A$

LUB

– bezpośrednie zapisanie wzoru (bez wyprowadzenia) na prędkość planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity, np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_P}{r_A}}$$

LUB

– poprawna metoda obliczenia odległości od środka Słońca do punktu A (aphelium) orbity planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** wyznaczenie tej odległości (na symbolach lub liczbach), np. zapisy równoważne poniższym:

$(|PA| = r_P + r_A \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P)$ albo $r_A = 5{,}62\ \mathrm{au} - 0{,}81\ \mathrm{au} = 4{,}81\ \mathrm{au}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 3.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości planetoidy $\mathcal{R}$ w punkcie aphelium **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $v_A \approx 7{,}3\ \mathrm{km/s}$

2 pkt – zapisanie równości energii mechanicznych planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w wyrażeniu na energię mechaniczną <u>wzorów</u> na energię potencjalną i na energię kinetyczną, **oraz** prawidłowe wyznaczenie odległości od środka Słońca do punktu A, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \frac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_A} \qquad \text{oraz} \qquad r_A = |PA| - r_P$$

albo w jednym równaniu

$$\frac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \frac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{|PA| - r_P}$$

1 pkt – zapisanie równości energii mechanicznych planetoidy $\mathcal{R}$ w punktach A (aphelium) i P (peryhelium) orbity **oraz** uwzględnienie w wyrażeniu na energię mechaniczną energii potencjalnej i energii kinetycznej (wystarczy poprzez oznaczenie), np. zapisy równoważne poniższym:

$E_{A\,kin} + E_{A\,pot} = E_{P\,kin} + E_{P\,pot}$

LUB

– poprawna metoda obliczenia odległości od środka Słońca do punktu A (aphelium) orbity planetoidy $\mathcal{R}$ **oraz** wyznaczenie tej odległości (na symbolach lub liczbach), np. zapisy równoważne poniższym:

$(|PA| = r_P + r_A \quad \rightarrow \quad r_A = |PA| - r_P)$ albo $r_A = 5{,}62\ \mathrm{au} - 0{,}81\ \mathrm{au} = 4{,}81\ \mathrm{au}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasady zachowania momentu pędu)
Wykorzystamy zasadę zachowania momentu pędu planetoidy $\mathcal{R}$ względem punktu centrum grawitacyjnego. Moment pędu planetoidy w punkcie perycentrum jest równy momentowi pędu planetoidy w punkcie apocentrum:

$$L_A = L_P$$

Wykorzystamy wzór na moment pędu. Prędkości planetoidy w punktach apocentrum i perycentrum są prostopadłe do promienia wodzącego, zatem:

$$m_{\mathcal{R}} v_A r_A = m_{\mathcal{R}} v_P r_P \qquad \rightarrow \qquad v_A r_A = v_P r_P$$

$$v_A = \frac{r_P}{r_A} v_P$$

Wyznaczymy r_A:

$$r_A + r_P = |PA| \qquad \rightarrow \qquad r_A = |PA| - r_P = 5{,}62\ \text{au} - 0{,}81\ \text{au} = 4{,}81\ \text{au}$$

Podstawimy dane liczbowe do wzoru na v_A:

$$v_A = \frac{0{,}81\ \text{au}}{4{,}81\ \text{au}} \cdot 43{,}29\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 7{,}29\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 7{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Sposób 2. (wyprowadzenie wzoru z zasad zachowania)
Uwaga! Poniżej przedstawiony sposób nie jest rekomendowany dla tego zadania, ponieważ nie wykorzystuje v_P i wymaga więcej rachunków algebraicznych oraz liczbowych niż sposób 1. Ten sposób byłby konieczny, gdyby w zadaniu nie była podana prędkość v_P.

Obliczymy wartość v_A prędkości, jaką ma planetoida $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity. Wykorzystamy zasadę zachowania energii mechanicznej oraz zasadę zachowania momentu pędu dla planetoidy $\mathcal{R}$. Przyrównamy te wielkości w punktach P i A orbity eliptycznej:

$$\begin{cases} E_P = E_A \\ L_P = L_A \end{cases}$$

Do powyższego układu równań podstawimy odpowiednie wzory na energię mechaniczną i moment pędu, następnie przekształcimy układ równań i wyznaczymy v_A:

$$\begin{cases} \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \dfrac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \dfrac{G M_S m_{\mathcal{R}}}{r_A} \\ m_{\mathcal{R}} v_P r_P = m_{\mathcal{R}} v_A r_A \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} v_P^2 - \dfrac{2GM_S}{r_P} = v_A^2 - \dfrac{2GM_S}{r_A} \\ v_P = \dfrac{r_A}{r_P} v_A \end{cases}$$

$$v_A^2 - \left(\frac{r_A}{r_P}\right)^2 v_A^2 = \frac{2GM_S}{r_A} - \frac{2GM_S}{r_P}$$

$$v_A^2 \left(1 - \left(\frac{r_A}{r_P}\right)^2\right) = 2GM_S \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right)$$

$$v_A^2 \left(\frac{r_P^2 - r_A^2}{r_P^2}\right) = 2GM_S \left(\frac{r_P - r_A}{r_A r_P}\right)$$

$$v_A^2 \left(\frac{r_P + r_A}{r_P}\right) = 2GM_S \left(\frac{1}{r_A}\right)$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_S}{(r_P + r_A)} \cdot \frac{r_P}{r_A}} = \sqrt{\frac{GM_S}{\frac{|PA|}{2}} \cdot \frac{r_P}{|PA| - r_P}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{2{,}81 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}} \cdot \frac{0{,}81\ \mathrm{au}}{4{,}81\ \mathrm{au}}} \approx 7{,}29 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 7{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Sposób 3. (zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej)

Uwaga! Poniżej przedstawiony sposób nie jest rekomendowany dla tego zadania, ponieważ nie jest optymalny – wymaga więcej rachunków liczbowych niż sposób 1.

Obliczymy wartość v_A prędkości, jaką ma planetoida $\mathcal{R}$ w punkcie A orbity. Wykorzystamy zasadę zachowania energii mechanicznej dla planetoidy $\mathcal{R}$. Przyrównamy energie mechaniczne w punktach P i A orbity eliptycznej oraz uwzględnimy w energii mechanicznej energię kinetyczną i energię potencjalną:

$$E_P = E_A \qquad \text{czyli} \qquad E_{P\,kin} + E_{P\,pot} = E_{A\,kin} + E_{A\,pot}$$

Do powyższego równania podstawimy odpowiednie wzory i wyznaczymy v_A:

$$\frac{m_{\mathcal{R}} v_P^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_P} = \frac{m_{\mathcal{R}} v_A^2}{2} - \frac{GM_S m_{\mathcal{R}}}{r_A}$$

$$v_P^2 - \frac{2GM_S}{r_P} = v_A^2 - \frac{2GM_S}{r_A}$$

$$v_A = \sqrt{v_P^2 - \frac{2GM_S}{r_P} + \frac{2GM_S}{r_A}} = \sqrt{v_P^2 - 2GM_S\left(\frac{r_A - r_P}{r_A r_P}\right)}$$

$$v_A = \sqrt{v_P^2 - 2GM_S \frac{|PA| - 2r_P}{(|PA| - r_P) r_P}}$$

$$v_A = \sqrt{\left(43{,}29\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \frac{4\ \mathrm{au}}{4{,}81 \cdot 0{,}81\ \mathrm{au^2}}}$$

$$v_A = \sqrt{\left(43{,}29\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}988 \cdot 10^{30} \frac{4}{4{,}81 \cdot 0{,}81} \cdot \frac{1}{1{,}496 \cdot 10^{11}}\ \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}}$$

$$v_A \approx \sqrt{1\,874{,}02\ \frac{\mathrm{km^2}}{\mathrm{s^2}} - 1\,821{,}09\ \frac{\mathrm{km^2}}{\mathrm{s^2}}} \approx 7{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Zadanie 6.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków. I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 5.1) […] stosuje równanie gazu doskonałego (Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu; 5.3) interpretuje wykresy ilustrujące przemiany gazu doskonałego; 5.4) opisuje związek pomiędzy temperaturą w skali Kelwina a średnią energią kinetyczną cząsteczek.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
PP

Komentarz do rozwiązania zadania 6.1. (do pierwszego zdania)
Z równania Clapeyrona wynika, że $T \propto pV$. Z treści zadania i wykresu wynika, że ciśnienie jest wprost proporcjonalne do objętości: $p = kV$ dla pewnego k. Zatem $T \propto kV \cdot V \propto V^2$.

Zadanie 6.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków. I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 5.1) […] stosuje równanie gazu doskonałego (Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu; 5.3) interpretuje wykresy ilustrujące przemiany gazu doskonałego.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne dokończenie zdania: wpisanie prawidłowej wartości ilorazu temperatur:
$6{,}25$ lub $\frac{25}{4}$
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie
Iloraz temperatur gazu w stanach B i A jest równy $\frac{T_B}{T_A} =$ ...6,25... .

Zadanie 6.3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków. IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 5.1) […] stosuje równanie gazu doskonałego (Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu; 5.3) interpretuje wykresy ilustrujące przemiany gazu doskonałego; 5.4) opisuje związek pomiędzy temperaturą w skali Kelwina a średnią energią kinetyczną cząsteczek; 5.5) stosuje pierwszą zasadę termodynamiki, odróżnia przekaz energii w formie pracy od przekazu energii w formie ciepła; 5.7) posługuje się pojęciem ciepła molowego w przemianach gazowych; 5.8) analizuje pierwszą zasadę termodynamiki jako zasadę zachowania energii.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1.)
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek IZT
Zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta U_{AB} = |Q_{AB}| - |W_{AB}|$$

Warunek ΔU1
Zapisanie związku między zmianą energii wewnętrznej w przemianie $A \to B$ a przyrostem temperatury, ciepłem molowym przy stałej objętości i liczbą moli, np.:

$$\Delta U_{AB} = n\frac{3}{2}R\Delta T_{AB} \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

Warunek ΔU2
Skorzystanie ze wzoru na energię wewnętrzną wyrażoną przez objętość i ciśnienie **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na przyrost energii wewnętrznej w przemianie $A \to B$ (wyrażonej przez objętości i ciśnienia w stanach A i B), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(U_A = \frac{3}{2}p_A V_A \quad \text{oraz} \quad U_B = \frac{3}{2}p_B V_B\right) \quad \to \quad \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A)$$

Warunek W
Poprawna metoda obliczenia pracy siły parcia w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wzoru na tę pracę (wyrażoną przez objętości i ciśnienia w stanach A i B), np.:

$$|W_{AB}| = \text{Pole pod } p(V) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

Warunek ΔT
Poprawna metoda wyznaczenia przyrostu temperatury w przemianie $A \to B$, tzn. wykorzystanie równań Clapeyrona dla stanów A i B, **oraz** zapisanie prawidłowej postaci przyrostu temperatury (albo przyrostu temperatury z czynnikiem nR), np. zapisy równoważne poniższym:

$$(p_A V_A = nRT_A \quad \text{oraz} \quad p_B V_B = nRT_B) \quad \to \quad nR\Delta T_{AB} = p_B V_B - p_A V_A$$

Schemat punktowania (dla rozwiązania sposobem 1.)
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ciepła pobranego w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $Q_{AB} = 2\,100\ \mathrm{J}$
3 pkt – spełnienie warunków: **IZT oraz W oraz ΔU1 oraz ΔT**
LUB
– spełnienie warunków: **IZT oraz W oraz ΔU2**
2 pkt – spełnienie warunków: **IZT oraz ΔU1**
LUB
– spełnienie warunków: **IZT oraz W**
LUB
– spełnienie warunków: **ΔU1 oraz W**
LUB
– spełnienie warunków: **(ΔU1 oraz ΔT)** albo **ΔU2**
1 pkt – spełnienie warunku **IZT**
LUB
– spełnienie warunku **ΔU1**
LUB
– spełnienie warunku **W**
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobami 2A i 2B i podobnymi)
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ciepła pobranego w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $Q_{AB} = 2\,100\ \mathrm{J}$
3 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemian izochorycznej i izobarycznej (jak w obu warunkach za 1 pkt) **oraz** poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu **oraz** poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} i ciepła Q_{CA} **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
LUB
– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** poprawna metoda obliczenia ΔU_{AX} i ΔU_{XB} **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie).

2 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemian izochorycznej i izobarycznej (jak w obu warunkach za 1 pkt) **oraz**
- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla odpowiedniego cyklu, **oraz** poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}
ALBO

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla odpowiedniego cyklu **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA} **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} oraz ciepła Q_{CA}

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** poprawna metoda obliczenia ΔU_{AX} albo ΔU_{XB}

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie).

1 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemiany izochorycznej $B \to C$ i przemiany izobarycznej $C \to A$ **oraz**

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu, np.:
  $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}, np.:
  $$|Q_{BC}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{BC} \qquad \text{albo} \qquad |Q_{CA}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{CA}$$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu, np.:
  $$|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A)$$

LUB

– założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemiany izobarycznej $B \to C$ i przemiany izochorycznej $C \to A$ **oraz**

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu, np.:
  $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| + |W_{ABC}|$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}, np.:
  $$|Q_{BC}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{BC} \qquad \text{albo} \qquad |Q_{CA}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{CA}$$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu, np.:
  $$|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A)$$

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek: $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (optymalny, z wykorzystaniem IZT i bezpośrednim obliczeniem ΔU_{AB})
Zapiszemy I zasadę termodynamiki dla przemiany termodynamicznej $A \to B$. Zastosujemy konwencję znaków, zgodnie z którą, gdy gaz pobiera energię w formie pracy lub ciepła, to wielkości te oznaczamy jako dodatnie, a gdy traci energię w postaci pracy lub ciepła, to wielkości te oznaczamy jako ujemne. Gaz się rozpręża, więc traci energię w formie pracy i jednocześnie pobiera energię w formie ciepła. Zatem:

$$1)\quad \Delta U_{AB} = |Q_{AB}| - |W_{AB}| \quad \to \quad 1a)\quad |Q_{AB}| = \Delta U_{AB} + |W_{AB}|$$

Do wyznaczenia zmiany energii wewnętrznej wykorzystamy związek między energią wewnętrzną a temperaturą:

$$2)\quad \Delta U_{AB} = nC_V\Delta T_{AB} \quad \to \quad 2a)\quad \Delta U_{AB} = n\frac{3}{2}R\Delta T_{AB}$$

Przyrost temperatury określimy na podstawie równań Clapeyrona dla stanów A i B:

$$3)\quad p_AV_A = nRT_A \quad \text{oraz} \quad p_BV_B = nRT_B \quad \to$$

$$4)\quad nR\Delta T_{AB} = nRT_B - nRT_A = p_BV_B - p_AV_A$$

Równanie 4) wykorzystamy w równaniu 2a):

$$5)\quad \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(p_BV_B - p_AV_A) = 1\,575\ \mathrm{J}$$

Do wyznaczenia pracy w przemianie $A \to B$ zastosujemy następujący lemat: praca w przemianie termodynamicznej jest równa polu pod wykresem zależności $p(V)$ dla danej przemiany. Zatem:

$$6)\quad |W_{AB}| = \text{Pole pod } p(V) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) = 525\ \mathrm{J}$$

Wzory 5) oraz 6) wykorzystamy we wzorze 1a):

$$7)\quad |Q_{AB}| = \frac{3}{2}(p_BV_B - p_AV_A) + \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A)$$

Do powyższego wzoru podstawimy dane liczbowe i wykonamy obliczenia:

$$8a)\quad |Q_{AB}| = \left(\frac{3}{2}\cdot(5\cdot 25 - 2\cdot 10) + \frac{1}{2}\cdot(2+5)(25-10)\right)\cdot 10^1\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$8b)\quad |Q_{AB}| = (157{,}5 + 52{,}5)\cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$$

Sposób 2A.
Rozważmy taki cykl przemian $A \to B \to C \to A$, w którym:
- przemiana $A \to B$ to przemiana opisana w zadaniu
- przemiana $B \to C$ jest izochoryczna, gdzie $V_C = V_B = 25\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$ oraz $p_A \le p \le p_B$
- przemiana $C \to A$ jest izobaryczna, gdzie $p_C = p_A = 2\cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$ oraz $V_A \le V \le V_B$.

W przemianie $A \to B$ gaz pobiera ciepło Q_{AB} z grzejnicy, w przemianie $B \to C$ gaz oddaje ciepło Q_{BC} do chłodnicy, w przemianie $C \to A$ gaz oddaje ciepło Q_{CA} do chłodnicy. Pracę całkowitą wykonaną przez siłę parcia w całym cyklu oznaczymy jako W_{ABC}. Zmiana energii wewnętrznej w całym cyklu wynosi zero, zatem na mocy I zasady termodynamiki mamy:

1) $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$ zatem

2) $|Q_{AB}| = |W_{ABC}| + |Q_{BC}| + |Q_{CA}|$

Obliczymy pracę jako pole obszaru ograniczonego figurą wykresu:

3) $|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \cdot (5-2) \cdot (25-10)\ 10^1\ \mathrm{J} = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Obliczymy Q_{BC}, wykorzystamy przy tym równanie Clapeyrona:

4) $|Q_{BC}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{3}{2}\Delta p_{BC}V_C = \frac{3}{2}(p_B - p_A)V_B = \frac{3}{2} \cdot (5-2) \cdot 25 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = \frac{225}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Podobnie obliczymy Q_{CA}:

5) $|Q_{CA}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{CA} = \frac{5}{2}p_C\Delta V_{CA} = \frac{5}{2}p_A(V_B - V_A) = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot (25-10) \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 75 \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Wyniki z równań 3) i 4) i 5) podstawiamy do równania 2):

6) $|Q_{AB}| = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + \frac{225}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + 75 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 210 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$

Sposób 2B.

Rozważmy taki cykl przemian $A \to B \to C \to A$, w którym:

- przemiana $A \to B$ to przemiana opisana w zadaniu
- przemiana $B \to C$ jest izobaryczna, gdzie $p_C = p_B = 5 \cdot 10^4$ Pa oraz $V_A \leq V \leq V_B$
- przemiana $C \to A$ jest izochoryczna, gdzie $V_C = V_A = 10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ oraz $p_A \leq p \leq p_B$.

W przemianie $A \to B$ gaz pobiera ciepło Q_{AB} z grzejnicy, w przemianie $B \to C$ gaz oddaje ciepło Q_{BC} do chłodnicy, w przemianie $C \to A$ gaz oddaje ciepło Q_{CA} do chłodnicy. Kierunek cyklu odpowiada pompie cieplnej. Pracę całkowitą przeciwko sile parcia w całym cyklu oznaczymy jako W_{ABC}. Zmiana energii wewnętrznej w całym cyklu wynosi zero, zatem na mocy I zasady termodynamiki mamy:

1) $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| + |W_{ABC}|$

zatem:

2) $|Q_{AB}| = |Q_{BC}| + |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$

Obliczymy pracę jako pole obszaru ograniczonego figurą wykresu:

3) $|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \cdot (5-2) \cdot (25-10)\ 10^1\ \mathrm{J} = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Obliczymy Q_{BC}, wykorzystamy przy tym równanie Clapeyrona:

4) $|Q_{BC}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{5}{2}p_C\Delta V_{BC} = \frac{5}{2}p_B(V_B - V_A) = \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot (25-10) \cdot 10^1\ \mathrm{J} = \frac{375}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Podobnie obliczymy Q_{CA}:

5) $|Q_{CA}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{CA} = \frac{3}{2}\Delta p_{CA}V_A = \frac{3}{2}(p_B - p_A)V_A = \frac{3}{2} \cdot (5-2) \cdot 10 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 45 \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Wyniki z równań 3) i 4) i 5) podstawiamy do równania 2):

6) $|Q_{AB}| = \frac{375}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + 45 \cdot 10^1\ \mathrm{J} - \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 210 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$

Inne, podobne sposoby rozwiązania

Zadanie można rozwiązać sposobem, w którym zmianę energii wewnętrznej ΔU_{AB} oblicza się jako sumę zmian energii wewnętrznych $\Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ w przemianach $A \rightarrow X$ (izobarycznej lub izochorycznej) oraz $X \rightarrow B$ (izochorycznej lub izobarycznej). Ten sposób niepotrzebnie wydłuża obliczenie zmiany energii wewnętrznej ΔU_{AB} (porównaj ze sposobem 1.)

Zadanie 7.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków. I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 1.1) rozróżnia wielkości wektorowe od skalarnych; wykonuje działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe); 1.13) składa i rozkłada siły działające wzdłuż prostych nierównoległych. 7.1) wykorzystuje prawo Coulomba do obliczenia siły oddziaływania elektrostatycznego między ładunkami punktowymi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 7.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.1) rozróżnia wielkości wektorowe od skalarnych; wykonuje działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe). 7.2) posługuje się pojęciem natężenia pola elektrostatycznego; 7.3) oblicza natężenie pola centralnego pochodzącego od jednego ładunku punktowego.

Zasady oceniania

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek Ei (dla i=1 albo i=2, albo i=3 będą to – odpowiednio – warunki **E1** albo **E2**, albo **E3**)
Poprawna metoda wyznaczenia wartości E_1 albo E_2, albo E_3 natężeń wektorów pól elektrycznych pochodzących – odpowiednio – od ładunków Q_1 albo Q_2, albo Q_3 **oraz** podanie prawidłowej postaci wzoru na wartość E_i natężenia pola od ładunku Q_i w zależności tylko od a, od Q i od odpowiedniej stałej fizycznej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_1 = \frac{kQ}{a^2} \quad \textbf{albo} \quad E_3 = \frac{kQ}{a^2} \quad \textbf{albo} \quad E_2 = \frac{kQ}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{kQ}{a^2}$$

Warunek E1=E3
Zapisanie zależności (równości) między wartościami E_1 i E_3 natężeń wektorów pól elektrycznych pochodzących od ładunków Q_1 i Q_3, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_1 = E_3$$

Warunek E1=2E2
Zapisanie zależności między wartościami E_1 i E_2 (albo E_3 i E_2) natężeń pól elektrycznych pochodzących od ładunków Q_1 i Q_2 (albo Q_3 i Q_2), np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_1 = 2E_2 \quad \textbf{albo} \quad E_3 = 2E_2$$

Warunek E13
Zapisanie zależności między wartością E_{13} wypadkowego natężenia pola elektrycznego pochodzącego od ładunków Q_1 i Q_3 a wartością E_1 (lub E_3) natężenia pola pochodzącego od ładunku Q_1 (lub Q_3) **albo** podanie prawidłowej postaci wzoru na wartość E_{13} w zależności tylko od a, od Q i od odpowiedniej stałej fizycznej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(E_{13} = \sqrt{2}E_1 \quad \text{lub} \quad E_{13} = \sqrt{2}E_3\right) \quad \textbf{albo} \quad E_{13} = \sqrt{2}\cdot\frac{kQ}{a^2}$$

Warunek EP-metoda
Zapisanie zależności między wartościami E_P a E_{13} i E_2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_P = E_{13} - E_2$$

Schemat punktowania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości E_P natężenia pola elektrycznego w punkcie P **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru: $E_P = \frac{kQ}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$

3 pkt – spełnienie warunków: **EP-metoda oraz E13 oraz (E1=2E2 albo E2)**
LUB
– spełnienie warunków: **E13 oraz E2 oraz** wskazanie (np. na rysunku lub zapisem słownym lub algebraicznym), że wektory $\vec{E}_{13}$ i $\vec{E}_2$ <u>leżą na jednej prostej</u> (mogą mieć nieprawidłowe zwroty).

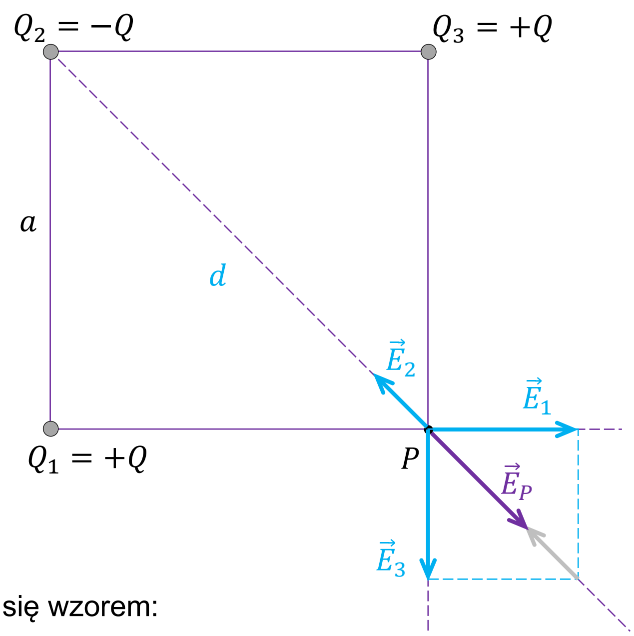
2 pkt – spełnienie warunku **E13**
LUB
– spełnienie warunku **EP-metoda oraz (E1=2E2 albo E2)**
LUB
– spełnienie warunków **Ei** dla **i=1 oraz i=2 oraz i=3**
LUB
– spełnienie warunków: **E1=E3 oraz E1=2E2**

1 pkt – spełnienie warunku **Ei** (tzn. dla jednego <u>dowolnego</u> **i**)
LUB
– spełnienie warunku **E1=E3**
LUB
– spełnienie warunku **E1=2E2**
LUB
– spełnienie warunku **EP-metoda**
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}_P$ jest wektorową sumą wektorów natężeń $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ i $\vec{E}_3$, pochodzących – odpowiednio – od ładunków: Q_1, Q_2 i Q_3.

Rysunek pomocniczy



Zapiszemy wektorowo:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_{13} + \vec{E}_2$$

gdzie $\vec{E}_{13}$ jest sumą wektorów $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_3$.

Na rysunku obok przedstawiono wektory $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ i $\vec{E}_3$ oraz geometryczny sposób wyznaczenia wektora $\vec{E}_P$. Wartość wektora $\vec{E}_P$ wyraża się wzorem:

$$1)\ \ E_P = E_{13} - E_2$$

Wartości wektorów $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_3$ są sobie równe i wyrażają się wzorem:

$$2)\ \ E_1 = E_3 = \frac{kQ}{a^2}$$

Wartość wektora $\vec{E}_{13}$ wyraża się wzorem (długość przekątnej kwadratu o bokach E_1 i E_3):

$$3)\ \ E_{13} = \sqrt{2} \cdot E_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{kQ}{a^2}$$

Wartość wektora $\vec{E}_2$ wyraża się wzorem:

$$4)\ \ E_2 = \frac{kQ}{d^2} = \frac{kQ}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{kQ}{a^2}$$

Wzory 4) i 3) podstawimy do wzoru 1):

$$5)\ \ E_P = \sqrt{2} \cdot \frac{kQ}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{kQ}{a^2} = \frac{kQ}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Zadanie 8.1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 1.1) rozróżnia wielkości wektorowe od skalarnych; wykonuje działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe). 7.2) posługuje się pojęciem natężenia pola elektrostatycznego; 7.3) oblicza natężenie pola centralnego pochodzącego od jednego ładunku punktowego.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia φ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego wyrażonego w stopniach lub w radianach: $\varphi \approx 83{,}6°$ (lub $\varphi \approx 84°$)

2 pkt – zauważenie i zapisanie, że kąt $\angle SBD$ lub $\angle DAS$ jest kątem granicznym dla przejścia światła ze szkła do powietrza, **oraz** zapisanie równania (z uwzględnieniem współczynnika załamania światła w szkle), z którego można obliczyć kąt graniczny dla przejścia światła przez granicę szkło – powietrze, np. zapisy równoważne poniższym:

$\left(\alpha_g = |\angle SBD|\right.$ oraz $\left.\dfrac{\sin\alpha_g}{\sin 90°} = \dfrac{n_p}{n_{sz}}\right)$ albo w jednym równaniu: $\sin|\angle SBD| = \dfrac{1}{1{,}5}$

LUB

– zauważenie i zapisanie, że kąt $\angle SBD$ lub $\angle DAS$ jest kątem granicznym dla przejścia światła ze szkła do powietrza, **oraz** wyprowadzenie/zapisanie zależności między α_g a φ, np. zapisy równoważne poniższym:

$\alpha_g = |\angle SBD|$ oraz $\varphi = 2\cdot|\angle SBD|$ (albo w jednym równaniu: $\varphi = 2\cdot\alpha_g$)

1 pkt – zauważenie i zapisanie, że kąt $\angle SBD$ lub $\angle DAS$ jest kątem granicznym dla przejścia światła ze szkła do powietrza, np. zapisy równoważne poniższym:

$\alpha_g = |\angle SBD|$ lub $\alpha_g = |\angle DAS|$

LUB

– wyprowadzenie/zapisanie zależności: $\varphi = 2\cdot|\angle SBD|$

Uwaga! W tym warunku identyfikacja $\angle SBD$ jako kąta granicznego nie jest wymagana.

LUB

– zapisanie równania na kąt graniczny bez identyfikacji lub z błędną identyfikacją tego kąta (oznaczeniem lub na rysunku lub wynikającym dalej z kontekstu) **oraz** uwzględnienie w tym równaniu wartości współczynnika załamania światła w szkle, np.:

$\sin\alpha_g = \dfrac{2}{3}$ (lub zapisy równoważne)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że skoro światło wysłane z punktu D przechodzi przez fragment kuli oznaczony łukiem AB (na rysunku przekroju kuli), to kąt padania promienia na granicę ośrodków w punkcie B, czyli $\angle SBD$ (lub $\angle DAS$), jest kątem granicznym dla szkła:

$$\alpha_g = |\angle SBD| \quad (\text{lub } \alpha_g = |\angle DAS|)$$

Zastosujemy wzór na kąt graniczny dla przejścia szkło – powietrze:

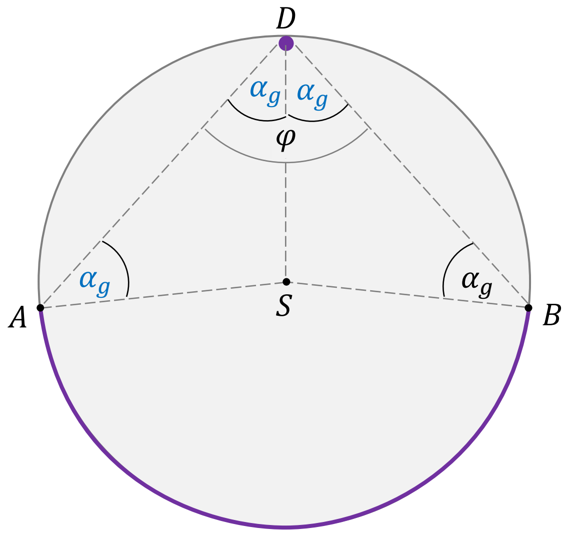
$$\frac{\sin \alpha_g}{\sin 90°} = \frac{n_p}{n_{sz}} \quad \rightarrow \quad \sin \alpha_g = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} = 0,(6) \approx 0{,}67$$

Miarę kąta granicznego wyznaczymy z podanych w *Uwadze* do zadania związków:

$$\alpha_g = \arcsin(0{,}67) \approx 42° \quad \rightarrow \quad |\angle SBD| = \alpha_g \approx 42°$$

Następnie powiążemy kąt $\angle BDA$ (o mierze φ) z kątem granicznym $\angle SBD$ (o mierze α_g) na podstawie elementarnych własności geometrycznych. Na mocy symetrii zjawiska wiemy, że trójkąty SBD i ASD są przystające. Dalej, z własności trójkątów równoramiennych SBD i ASD, mamy:

$$\left(|\angle SBD| = |\angle BDS| = \alpha_g \ \text{ oraz } \ |\angle DAS| = |\angle SDA| = \alpha_g\right) \ \rightarrow \ |\angle BDA| = 2\alpha_g$$



Zatem skoro:

$$\left(|\angle BDA| = \varphi \ \text{ oraz } \ |\angle BDA| = 2\alpha_g\right) \ \text{ to } \ \varphi = 2\alpha_g$$

Obliczymy φ:

$$\varphi = 2 \cdot 42° \approx 84°$$

Zadanie 8.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 10.6) stosuje prawa odbicia i załamania fal do wyznaczenia biegu promieni w pobliżu granicy dwóch ośrodków; 10.7) opisuje zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia i wyznacza kąt graniczny.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
B2

Zadanie 9. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 1.14) oblicza parametry ruchu jednostajnego po okręgu; opisuje wektory prędkości i przyspieszenia dośrodkowego. 9.3) analizuje ruch cząstki naładowanej w stałym jednorodnym polu magnetycznym.

Zasady oceniania
3 pkt – poprawna metoda obliczenia okresu **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $T \approx 2{,}10 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$
2 pkt – zapisanie równania identyfikującego siłę Lorentza działającą na elektron jako siłę dośrodkową **oraz** uwzględnienie w tym równaniu wzorów na te siły (z prędkością albo prędkością kątową), **oraz** uwzględnienie/zapisanie związku między prędkością (lub prędkością kątową) a okresem, np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_e \frac{v^2}{r} = qvB \quad \text{oraz} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

albo

$$m_e \omega^2 r = qvB \quad \text{oraz} \quad v = \omega r \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

albo w jednym równaniu

$$m_e \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = q\left(\frac{2\pi r}{T}\right)B$$

1 pkt – zapisanie równania identyfikującego siłę Lorentza działającą na elektron jako siłę dośrodkową, np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_e a_{do} = F_L \quad \text{albo} \quad F_{do} = F_L$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Na elektron poruszający się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym działa siła Lorentza, która jednocześnie pełni funkcję siły dośrodkowej. Zapiszemy równanie II zasady dynamiki identyfikujące siłę Lorentza jako siłę dośrodkową:

$$m_e a_{do} = F_L$$

Zastosujemy wzory na przyśpieszenie dośrodkowe oraz na siłę Lorentza.

Wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji magnetycznej, zatem:

$$m_e \frac{v^2}{r} = qvB \quad \rightarrow \quad m_e \frac{v}{r} = qB$$

Skorzystamy ze związku między okresem a prędkością w ruchu jednostajnym po okręgu:

$$m_e \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)}{r} = qB \quad \rightarrow \quad m_e \left(\frac{2\pi}{T}\right) = qB \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi m_e}{qB}$$

Do otrzymanego wzoru podstawimy dane liczbowe i wartości stałych:

$$T \approx \frac{2 \cdot 3{,}142 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}70 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}} \approx 21{,}0 \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{C \cdot m}}\right)} = 2{,}10 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

Zadanie 10. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 2.3) (G) opisuje wpływ wykonanej pracy na zmianę energii. 3.2) oblicza wartość energii kinetycznej […]; 3.3) wykorzystuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczania parametrów ruchu. 7.11) analizuje ruch cząstki naładowanej w stałym jednorodnym polu elektrycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia napięcia **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $U_{XY} \approx 4{,}55\ \mathrm{mV}$ (lub $4{,}6\ \mathrm{mV}$ albo $4{,}5\ \mathrm{mV}$)

2 pkt – zapisanie/wykorzystanie związku wynikającego z twierdzenia o pracy siły wypadkowej i zmianie energii kinetycznej **oraz** zapisanie/wykorzystanie wyrażenia na energię kinetyczną **oraz** zapisanie/wykorzystanie wyrażenia na pracę siły elektrycznej **oraz** poprawne zidentyfikowanie wszystkich danych, np. zapisy równoważne poniższym:

$$|e|U_{XY} = \frac{1}{2} m_e v_X^2 \quad \rightarrow \quad 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot U_{XY} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot \left(4 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2$$

1 pkt – zapisanie związku wynikającego z twierdzenia o pracy siły wypadkowej (tu elektrycznej) i zmianie energii kinetycznej **oraz** wykorzystanie wzoru na pracę siły elektrycznej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$|e|U_{XY} = \Delta E_{kin\,XY}$$

LUB

– zapisanie związku wynikającego z twierdzenia o pracy siły wypadkowej (tu elektrycznej) i zmianie energii kinetycznej **oraz** wykorzystanie wzoru na energię kinetyczną, np. zapisy równoważne poniższym:

$$W_{F\,el} = \frac{1}{2} m_e v_X^2 - 0$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zastosujemy twierdzenia o pracy siły wypadkowej i zmianie energii kinetycznej: praca siły pola elektrycznego działającej na elektron jest równa zmianie energii kinetycznej, która zaszła gdy elektron wyhamował do zerowej prędkości. Ta praca jest ujemna, ponieważ siła elektryczna ma zwrot przeciwny do zwrotu prędkości elektronu. Zatem:

$$1\text{a)}\quad -|e|U_{XY} = E_{kinY} - E_{kinX} \quad\rightarrow\quad 1\text{b)}\quad -|e|U_{XY} = 0 - E_{kinX} \quad\rightarrow\quad 1\text{c)}\quad |e|U_{XY} = E_{kinX}$$

Zastosujemy wzór na energię kinetyczną elektronu w punkcie X:

$$2)\quad |e|U_{XY} = \frac{1}{2}m_e v_X^2 \quad\rightarrow\quad 3)\quad U_{XY} = \frac{m_e}{2|e|}v_X^2$$

Do wzoru 3) podstawimy dane liczbowe i wykonamy obliczenia:

$$U_{XY} = \frac{9{,}109\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{2\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}\cdot\left(4\cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \approx 45{,}49\cdot 10^{-4}\ \mathrm{V} \approx 4{,}55\ \mathrm{mV}$$

Zadanie 11.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się […] tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. XII.5) posługuje się pojęciami pierwiastek, jądro atomowe, izotop, proton, neutron, elektron; opisuje skład jądra atomowego na podstawie liczb masowej i atomowej; XII.6) zapisuje reakcje jądrowe, stosując zasadę zachowania liczby nukleonów i zasadę zachowania ładunku; XII.9) […] opisuje rozpady […] beta (β^+, β^-).

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie schematu równania rozpadu β^- jądra neonu ${}^{23}_{10}\mathrm{Ne}$, tzn. wpisanie właściwych liczb: atomowej i masowej, **oraz** zapisanie symbolu lub nazwy pierwiastka, którego jądro powstaje: ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$ albo Na albo *sód*

1 pkt – poprawne uzupełnienie schematu równania rozpadu β^- jądra neonu ${}^{23}_{10}\mathrm{Ne}$ (tzn. wpisanie właściwych liczb atomowej i masowej powstałego jądra)

LUB

– poprawne zapisanie symbolu lub nazwy pierwiastka X: ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$ albo Na albo *sód*

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$${}^{23}_{10}\mathrm{Ne} \quad\rightarrow\quad {}^{23}_{11}\mathrm{X} \;+\; \beta^- \;+\; {}^{0}_{0}\tilde{\nu}$$

symbol (lub nazwa) pierwiastka X: ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$ albo Na albo *sód*

Zadanie 11.2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	Zdający: 3.2) (P) posługuje się pojęciami: energii spoczynkowej […]; 3.3) (P) […] opisuje rozpady alfa, beta (wiadomości o neutrinach nie są wymagane) […]; 3.5) (P) opisuje reakcje jądrowe, stosując […] zasadę zachowania energii.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie
PP

Zadanie 11.3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. III. Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci tekstu, tabel, wykresów, schematów i rysunków.	Zdający: 3.4) (P) opisuje rozpad izotopu promieniotwórczego, posługując się pojęciem czasu połowicznego rozpadu; rysuje wykres zależności liczby jąder, które uległy rozpadowi od czasu […]. 12.3) przeprowadza złożone obliczenia liczbowe, posługując się kalkulatorem; 12.5) dopasowuje prostą $y = ax + b$ do wykresu i ocenia trafność tego postępowania; oblicza wartości współczynników a i b (ocena ich niepewności nie jest wymagana).

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1a. oraz 1b.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60\ \mathrm{min}$ do $T = 0{,}65\ \mathrm{min}$

3 pkt – poprawna metoda obliczenia $\log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$ dla $t = T$ **oraz** podanie prawidłowej wartości tego logarytmu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \;\rightarrow\; \log_{10}\left(\frac{1}{2}m_0\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + 1{,}4 \approx 1{,}1 \quad \text{dla } t = T$$

albo (z pośrednim obliczeniem m_0)

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad\rightarrow\quad m_0 = 10^{1,4}\ \mathrm{ju} \quad\rightarrow\quad \log_{10}\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{1,4}\right) \approx 1{,}1 \text{ dla } t = T$$

LUB

– poprawna metoda obliczenia $\log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$ dla $t = T$ **oraz** podanie błędnej wartości tego logarytmu, **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości odczytanie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad\rightarrow\quad \log_{10}\left(\frac{1}{2}m_0\right) \approx y \quad (y \neq 1{,}1) \quad \text{dla } t = T = x$$

2 pkt – zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy m_0 jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ **oraz** zapisanie warunku, że dla czasu połowicznego rozpadu $t = T$ $m_T = \frac{1}{2}m_0$ (albo że wartość logarytmu wynosi $\log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad \text{dla } t = T \text{ mamy } m_T = \frac{1}{2}m_0$$

albo

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad \text{dla } t = T \text{ mamy } \log_{10} m_T = \log_{10}\left(\frac{m_0}{2}\right)$$

LUB

– zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy m_0 jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ **oraz** poprawne obliczenie tej masy i podanie jej prawidłowej wartości liczbowej wyrażonej w jednostkach umownych, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad m_0 = 10^{1,4}\ \mathrm{ju}$$

1 pkt – zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60\ \mathrm{min}$ do $T = 0{,}65\ \mathrm{min}$

3 pkt – zapisanie wzoru na logarytm masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ w postaci zależności liniowej względem czasu t **oraz** prawidłowa identyfikacja współczynnika kierunkowego tej zależności, **oraz** podanie (na podstawie wykresu) prawidłowej wartości tego współczynnika, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \quad \text{oraz}$$

$$A = \frac{-0{,}2 - 1{,}4}{(3{,}3 - 0)\ \mathrm{min}} = -0{,}485\ \frac{1}{\mathrm{min}}$$

LUB

– zapisanie wzoru na logarytm masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ w postaci zależności liniowej względem czasu t **oraz** prawidłowa identyfikacja współczynnika kierunkowego tej zależności, **oraz** podanie błędnej wartości tego współczynnika, **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości obliczenie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \quad \text{oraz}$$

$$A = z\ \frac{1}{\mathrm{min}} \quad \text{oraz} \quad T = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{z} = x$$

2 pkt – zapisanie wzoru na logarytm masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ w postaci zależności liniowej względem czasu t **oraz** prawidłowa identyfikacja współczynnika kierunkowego tej zależności, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T}$$

1 pkt – zapisanie obustronnego logarytmu wzoru – na masę jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ pozostających w próbce $\mathcal{P}$ – wynikającego z prawa rozpadu promieniotwórczego, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m(t) = \log_{10}\left(m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\right) \quad \text{albo} \quad m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \ \ || \ \log_{10} \_\_$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 3.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60\ \mathrm{min}$ do $T = 0{,}65\ \mathrm{min}$

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt <u>dla dwóch</u> wybranych punktów z wykresu **oraz** zapisanie jednego równania z wyeliminowanym m_0, z którego można obliczyć T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1} \quad \text{oraz} \quad m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{T}} = 10^{L_2}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2 - t_1}{T}} = 10^{L_2 - L_1}$$

LUB

– zapisanie jednego z równań określonych w pierwszym myślniku za 3 pkt z błędnie odczytaną jedną współrzędną punktu (np. t_1 lub L_1) **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości obliczenie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1} \quad \rightarrow \quad \text{obliczenia} \quad \rightarrow \quad T = \frac{(t_2 - t_1)\cdot \log_{10} 2}{L_1 - L_2} = \text{wartość}$$

2 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu **oraz** zastosowanie prawa rozpadu z uwzględnieniem współrzędnych tego punktu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1} \quad \rightarrow \quad m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1}$$

1 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 4.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, mieszczącego się w przedziale: od $T = 0{,}60\ \mathrm{min}$ do $T = 0{,}65\ \mathrm{min}$

3 pkt – spełnienie warunków za 2 pkt określonych w pierwszym **oraz** drugim myślniku **oraz** zastosowanie równania wynikającego z prawa rozpadu promieniotwórczego **oraz** zapisanie jednego równania z wyeliminowanym m_0, z którego można obliczyć T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$10^{1,4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1}$$

LUB

– zapisanie równania określonego w pierwszym myślniku za 3 pkt z błędnie odczytaną jedną współrzędną punktu (np. t_1 lub L_1) **oraz** konsekwentne dla tej błędnej wartości obliczenie i podanie czasu T, np. zapisy równoważne poniższym:

$$10^{1,4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{T}} = 10^{L_1} \ \rightarrow \ \text{obliczenia} \rightarrow \quad T = \frac{t_1 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - L_1} = \text{wartość}$$

2 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu **oraz** zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1} \quad \text{oraz} \quad \log_{10} m_0 = 1{,}4$$

LUB

– zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy m_0 jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ **oraz** poprawne obliczenie tej masy i podanie jej prawidłowej wartości liczbowej wyrażonej w jednostkach umownych, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{oraz} \quad m_0 = 10^{1,4}\ \mathrm{ju}$$

1 pkt – wyznaczenie masy dla dowolnie wybranej chwili czasu, na podstawie współrzędnych wybranego punktu wykresu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) \quad \rightarrow \quad m_1(t_1) = 10^{L_1}$$

LUB

– zapisanie poprawnej wartości logarytmu masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\log_{10} m_0 = 1{,}4$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1a. (z wykorzystaniem m_0 i definicji T)

Do wyznaczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wykorzystamy wykres oraz definicję czasu połowicznego rozpadu. Oznaczymy jako m_0 początkową masę jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$ oraz odczytamy z wykresu wartość $\log_{10} m_0$:

$$m(t_0 = 0) = m_0 \qquad \text{zatem} \qquad \log_{10} m_0 = 1{,}4$$

Po czasie $t = T$ w próbce $\mathcal{P}$ pozostanie połowa początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$:

$$m(t = T) = m_T = \frac{1}{2} m_0$$

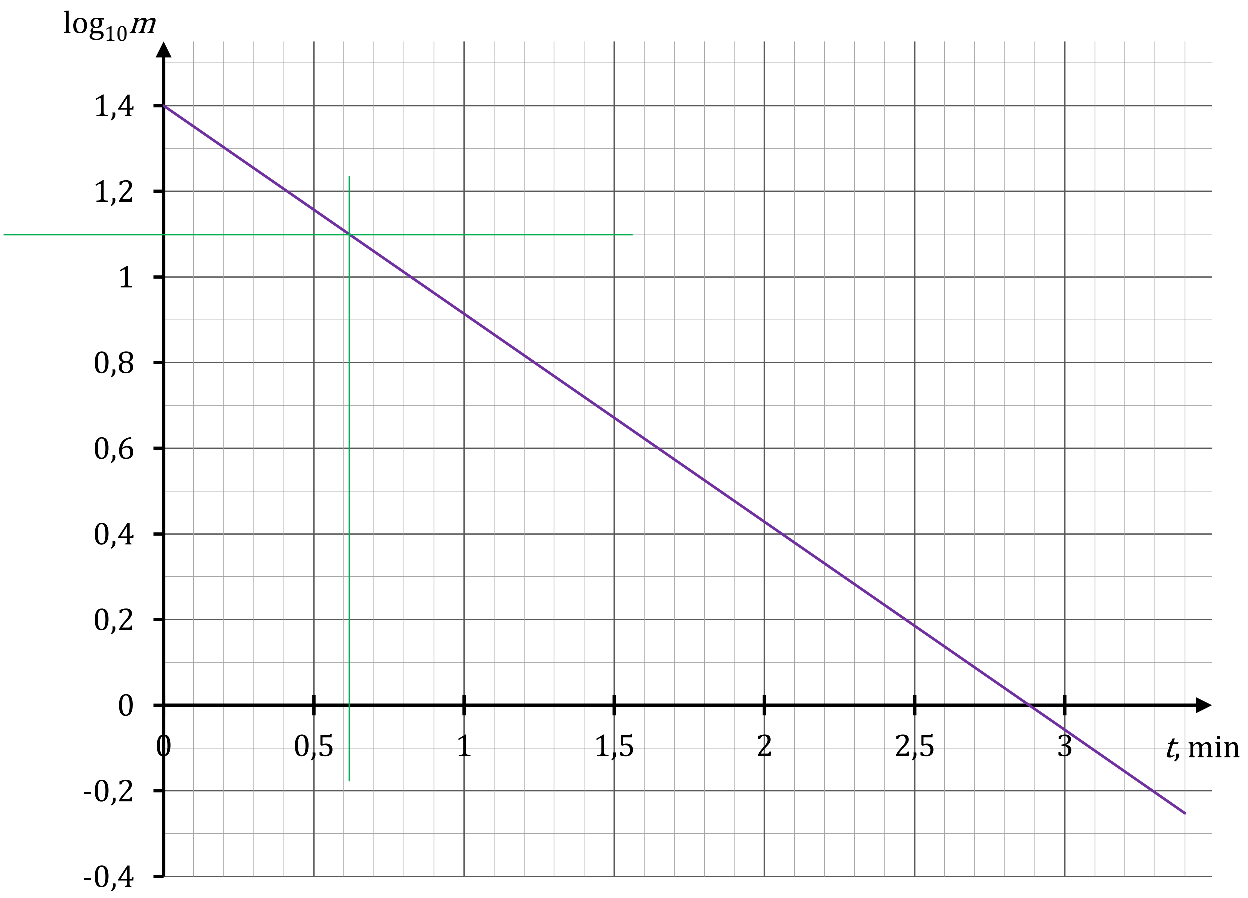
Obliczymy wartość logarytmu połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ (masy wyrażonej w jednostkach umownych ju):

$$\log_{10} m_T = \log_{10}\left(\frac{1}{2} \cdot m_0\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10} m_0 \approx$$

$$\approx -0{,}301 + 1{,}4 = 1{,}099 \approx 1{,}1$$

Z wykresu odczytamy czas T, dla którego logarytm połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wynosi w przybliżeniu $\log_{10} m_T \approx 1{,}1$.

$$\log_{10} m_T \approx 1{,}1 \qquad \text{dla} \qquad T \approx 0{,}62 \text{ min}$$



Sposób 1b. (z wykorzystaniem m_0 i definicji T)
Do wyznaczenia czasu połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wykorzystamy wykres oraz definicję czasu połowicznego rozpadu. Oznaczymy jako m_0 początkową masę jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ w próbce $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$:

$$m(t_0 = 0) = m_0$$

Następnie wyznaczymy m_0 w jednostkach umownych (ju). W tym celu najpierw odczytamy z wykresu wartość $\log_{10} m_0$:

$$1)\quad \log_{10} m_0 = 1{,}4 \quad \text{zatem}$$

$$2)\quad m_0 = 10^{1,4}\ \mathrm{ju} \approx 25{,}12\ \mathrm{ju}$$

Po czasie $t = T$ w próbce $\mathcal{P}$ pozostanie połowa początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$:

$$m(t = T) = m_T = \frac{1}{2}m_0 \qquad \rightarrow \qquad 3)\quad m_T = \frac{1}{2}\cdot 10^{1,4}\ \mathrm{ju} \approx 12{,}56\ \mathrm{ju}$$

Obliczymy wartość logarytmu połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$:

$$4)\quad \log_{10} m_T = \log_{10}\left(\frac{10^{1,4}}{2}\right) \approx 1{,}099$$

Z wykresu odczytamy czas T, dla którego logarytm połowy początkowej masy jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$ wynosi w przybliżeniu $\log_{10} m_T \approx 1{,}1$.

$$5)\quad \log_{10} m_T \approx 1{,}1 \qquad \text{dla} \qquad T \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

Sposób 2. (z wykorzystaniem i interpretacją równania prostej)
Uwaga! Sposób 2. jest rekomendowany jako bardziej dokładny od sposobu 1., ponieważ współczynnik nachylenia prostej można wyznaczyć z większą dokładnością niż odciętą punktu wykresu o rzędnej 1,1.

Zapiszemy równanie wynikające z prawa rozpadu promieniotwórczego:

$$1)\quad m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie T jest czasem połowicznego rozpadu jąder neonu $^{23}\mathrm{Ne}$.
Zlogarytmujemy obie strony zależności 1) logarytmem o podstawie 10, następnie wykonamy przekształcenia równoważne z wykorzystaniem własności logarytmów:

$$2a)\quad \log_{10} m(t) = \log_{10}\left(m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\right)$$

$$2b)\quad \log_{10} m(t) = \log_{10} m_0 + \frac{t}{T}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Zależność 2b) przepiszemy w postaci wskazującej na zależność liniową logarytmu masy od czasu. Następnie zidentyfikujemy współczynniki tej zależności liniowej:

$$3a)\quad \log_{10} m(t) = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T}\cdot t + \log_{10} m_0$$

Zatem:

$$3b)\quad \log_{10} m(t) = A \cdot t + B$$

gdzie:

$$4)\quad A = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \qquad \text{oraz} \qquad B = \log_{10} m_0$$

Obliczymy współczynnik A z wykresu, a następnie z równania 4) obliczymy czas połowicznego rozpadu T:

$$5)\quad A = \frac{-0{,}2 - 1{,}4}{(3{,}3 - 0)\ \mathrm{min}} = -0{,}485\ \frac{1}{\mathrm{min}}$$

$$6)\quad -0{,}485\ \frac{1}{\mathrm{min}} = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{T} \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}485}\ \mathrm{min}$$

$$7)\quad T = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}485}\ \mathrm{min} \approx \frac{-0{,}301}{-0{,}485}\ \mathrm{min} \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

<u>Sposób 3.</u> (z wykorzystaniem równania rozpadu i dwóch dowolnych punktów wykresu)

Rozważmy punkty na wykresie leżące najbliżej punktów kratowych (i w miarę odległe od siebie), np.:

$$P_1 = (t_1\,; L_1) = (t_1\,; \log_{10} m_1) = (0{,}4\ \mathrm{min}; 1{,}2)$$

$$P_2 = (t_2\,; L_2) = (t_2\,; \log_{10} m_2) = (3{,}3\ \mathrm{min}; -0{,}2)$$

To oznacza, że:

$$1{,}2 = \log_{10} m(0{,}4) \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}2} = m(0{,}4) \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}2} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}}$$

$$-0{,}2 = \log_{10} m(3{,}3) \quad \rightarrow \quad 10^{-0{,}2} = m(3{,}3) \quad \rightarrow \quad 10^{-0{,}2} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3{,}3}{T}}$$

Ostatnie równania w powyższych wierszach wynikają z równania prawa rozpadu promieniotwórczego: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Z tych równań wyeliminujemy m_0:

$$\frac{10^{1{,}2}}{10^{-0{,}2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4-3{,}3}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2{,}9}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{1{,}4} = 2^{\frac{2{,}9}{T}}$$

Ostatnie równanie powyżej zlogarytmujemy stronami (logarytmem o podstawie 2):

$$\log_2 10^{1{,}4} = \frac{2{,}9}{T} \quad \rightarrow \quad \frac{2{,}9}{T} = 1{,}4 \cdot \log_2 10 \quad \rightarrow \quad \frac{2{,}9}{T \cdot 1{,}4} = \frac{1}{\log_{10} 2}$$

Zatem:

$$T = \frac{2{,}9 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4} = 0{,}6235 \ldots \approx 0{,}62\ \mathrm{min}$$

Dodatkowe przykłady

Poniżej zapiszemy wzór ogólny na T dla punktów $P_1 = (t_1\,; L_1)$ i $P_2 = (t_2\,; L_2)$. Ten wzór wynika z analogicznego jak powyżej rachunku przeprowadzonego na symbolach:

$$T = \frac{(t_2 - t_1) \cdot \log_{10} 2}{L_1 - L_2}$$

Przykład 1.

$$P_1 = (0; 1{,}4) \quad P_2 = (2{,}88\,; 0) \quad \rightarrow \quad T = \frac{2{,}88 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4} \text{ min} \approx 0{,}62 \text{ min}$$

Przykład 2.

$$P_1 = (0{,}2; 1{,}3) \quad P_2 = (1{,}85\,; 0{,}5) \quad \rightarrow \quad T = \frac{1{,}65 \cdot \log_{10} 2}{0{,}8} \text{ min} \approx 0{,}62 \text{ min}$$

<u>Sposób 4.</u> (z wykorzystaniem równania rozpadu oraz masy początkowej i punktu wykresu)

Z wykresu wyznaczymy $m_0 = m(t = 0)$:

1) $\log_{10} m_0 = 1{,}4$ zatem

2) $m_0 = 10^{1{,}4}\ \text{ju} \approx 25{,}12\ \text{ju}$

Rozważmy dowolny punkt na wykresie leżący najbliżej punktów kratowych, np.:

$$P_1 = (t_1;\ L_1) = (t_1\,; \log_{10} m_1) = (0{,}4 \text{ min}; 1{,}2)$$

To oznacza, że:

$$3)\ \ 1{,}2 = \log_{10} m(0{,}4) \quad \rightarrow \quad 4)\ \ 10^{1{,}2} = m(0{,}4)$$

Uwzględnimy równanie wynikające z prawa rozpadu promieniotwórczego:

$$5)\ \ m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \rightarrow \quad 6)\ \ m(0{,}4) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}}$$

Z równań 2) i 4) i 6) wynika, że:

$$10^{1{,}2} = 10^{1{,}4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{-0{,}2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}4}{T}} \quad \rightarrow \quad 10^{0{,}2} = 2^{\frac{0{,}4}{T}}$$

Ostatnie równanie powyżej zlogarytmujemy stronami (logarytmem o podstawie 10):

$$0{,}2 = \frac{0{,}4}{T}\log_{10} 2 \quad \rightarrow \quad T = \frac{0{,}4}{0{,}2}\log_{10} 2 \quad \rightarrow \quad T \approx 0{,}60 \text{ min}$$

Dodatkowe przykłady

Poniżej zapiszemy wzór ogólny na T dla punktu $P_1 = (t_1\,; L_1)$ i masy $m_0 = 10^{1{,}4}$ ju. Ten wzór wynika z analogicznego jak powyżej rachunku przeprowadzonego na symbolach.

$$T = \frac{t_1 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - L_1}$$

Przykład 1.

$$P_1 = (1{,}65; 0{,}6) \quad \rightarrow \quad T = \frac{1{,}65 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - 0{,}6} \text{ min} \approx 0{,}62 \text{ min}$$

Przykład 2.

$$P_1 = (2{,}05; 0{,}4) \quad \rightarrow \quad T = \frac{2{,}05 \cdot \log_{10} 2}{1{,}4 - 0{,}4} \text{ min} \approx 0{,}62 \text{ min}$$