

# **EGZAMIN WSTĘPNY CZERWIEC 2014**

## **MATEMATYKA**

Poziom podstawowy

### **Kryteria oceniania odpowiedzi**

### Klucz punktowania zadań zamkniętych

|           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| zadanie   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| odpowiedź | D | C | C | A | D | A | A | B | C | C  | A  | B  | C  |

|           |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| zadanie   | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| odpowiedź | C  | C  | C  | B  | B  | B  | A  | D  | C  | B  | D  | B  |

### Schemat oceniania zadań otwartych

#### Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność  $(2x-3)(3-x) \geq 0$ .

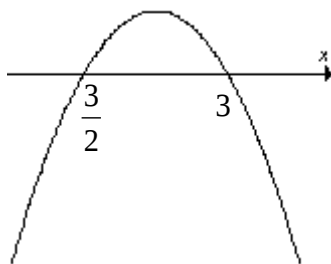
#### Rozwiązanie

Wyznaczamy miejsca zerowe wielomianu, występującego po lewej stronie nierówności:

$$(2x-3)=0 \text{ lub } (3-x)=0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 3$$

Szkicujemy parabolę, opisaną przez lewą stronę nierówności.



Odczytujemy z ilustracji zbiór rozwiązań nierówności:  $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ .

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 3$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,

$$\text{np. } x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 3, x \in \left\langle \frac{2}{3}, 3 \right\rangle.$$

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

- $\left\langle \frac{3}{2}, 3 \right\rangle$

albo

- $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

albo

- $x \geq \frac{3}{2}, x \leq 3$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

**Zadanie 27. (2 pkt)**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  i każdej liczby rzeczywistej  $b$  prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

**Rozwiązanie**

Aby wykazać prawdziwość podanej nierówności, przekształcimy ją najpierw do prostszej postaci równoważnej. Rozpoczynamy od podanej nierówności:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez 4:

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Stąd otrzymujemy:  $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ , czyli  $(a-b)^2 \geq 0$ . Nierówność ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  i każdej liczby rzeczywistej  $b$ , zatem prawdziwa jest też

nierówność równoważna  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ , co należało wykazać.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy przekształci podaną nierówność do postaci  $2a^2 + 2b^2 \geq 4ab$  lub  $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.

**Zadanie 28. (2 pkt)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry oraz  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ .

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przekształcamy wyrażenie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Następnie podstawiamy  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  za  $\cos \alpha$  i otrzymujemy, że  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy przekształci wyrażenie  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$  i otrzyma w wyniku:  $\frac{1}{\cos \alpha}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} : \frac{3}{\sqrt{3}}$  lub  $\sqrt{3}$ .

**Rozwiązanie (II sposób)**

Obliczamy  $\sin \alpha$ , wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Następnie obliczamy wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \frac{\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} + 1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy obliczy  $\sin \alpha$  wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego:

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} : \frac{3}{\sqrt{3}}$  lub  $\sqrt{3}$ .

**Zadanie 29. (2 pkt)**

Liczby  $6, 2x+4, x+26$  w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę  $r$  tego ciągu.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Ciąg  $(6, 2x+4, x+26)$  jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną

wyrazów sąsiednich. Stąd:  $2x+4 = \frac{6+x+26}{2}$ .

Rozwiązaniem równania jest  $x=8$ .

Różnica  $r$  ciągu  $(6, 2x+4, x+26)$  jest równa:  $r = 2 \cdot 8 + 4 - 6 = 14$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie:  $2x+4 = \frac{6+x+26}{2}$  lub

$2(2x+4) = 32+x$ , lub  $2x+4-6 = x+26-2x-4$  (różnica sąsiednich wyrazów ciągu jest stała).

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy różnicę  $r$  ciągu  $(6, 2x+4, x+26)$ :  $r = 14$ .

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Ciąg  $(6, 2x+4, x+26)$  jest arytmetyczny, zatem  $2x+4 = 6+r$  oraz  $x+26 = 6+2r$ , gdzie  $r$  oznacza różnicę ciągu arytmetycznego.

Rozwiązując układ równań  $\begin{cases} 2x+4 = 6+r \\ x+26 = 6+2r \end{cases}$  otrzymujemy:  $x=8, r=14$ .

Odp. Różnica  $r$  tego ciągu jest równa 14.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze układ równań:  $\begin{cases} 2x+4 = 6+r \\ x+26 = 6+2r \end{cases}$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy różnicę  $r$  ciągu  $(6, 2x+4, x+26)$ :  $r = 14$ .

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

**Zadanie 30. (2 pkt)**

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych:

$$K = \{-4, -1, 1, 5, 6\} \text{ i } L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}.$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

**Rozwiązanie (I sposób) (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane  $(x, y)$  dwóch liczb, ze zbiorów  $K = \{-4, -1, 1, 5, 6\}$  i  $L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}$ .

Niech  $\Omega$  oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a  $A$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa:  $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$ .

Iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni, gdy:

- obie wylosowane liczby są dodatnie  
albo
- obie wylosowane liczby są ujemne.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  jest więc równa

$$|A| = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{13}{25}$ .

**Rozwiązanie (II sposób) (metoda tabeli)**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane  $(x, y)$  dwóch liczb, ze zbiorów  $K = \{-4, -1, 1, 5, 6\}$  i  $L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}$ .

Niech  $\Omega$  oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a  $A$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

|    | -4 | -1 | 1 | 5 | 6 |
|----|----|----|---|---|---|
| -3 | ☺  | ☺  |   |   |   |
| -2 | ☺  | ☺  |   |   |   |
| 2  |    |    | ☺ | ☺ | ☺ |
| 3  |    |    | ☺ | ☺ | ☺ |
| 4  |    |    | ☺ | ☺ | ☺ |

Symbol ☺ w tabeli oznacza zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25 \text{ i } |A| = 13, \text{ zatem } P(A) = \frac{13}{25}.$$

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje .....1 pkt  
gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$   
albo
- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $|A| = 13$

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

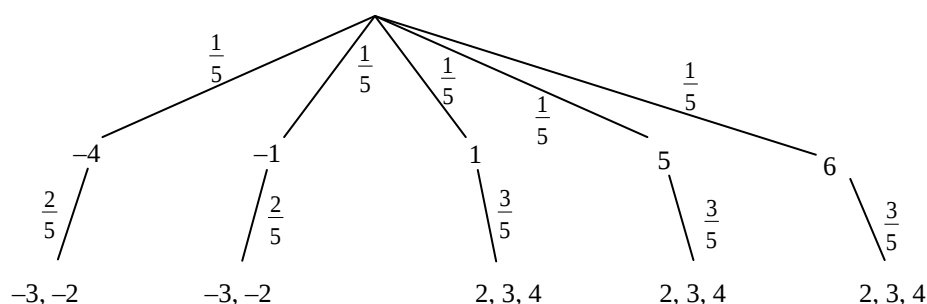
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A:  $P(A) = \frac{13}{25}$ .

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełnił błąd przy zliczaniu par w tabeli, spełniających warunki zadania, i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 pkt**.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

**Rozwiązanie (III sposób) (metoda drzewa)**

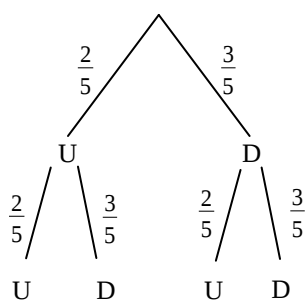
Rysujemy drzewo:



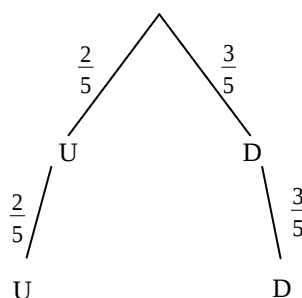
Prawdopodobieństwo zdarzenia A (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}.$$

**albo**



**albo**



U – oznacza wylosowanie liczby ujemnej  
D – oznacza wylosowanie liczby dodatniej

Prawdopodobieństwo zdarzenia A (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}.$$

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opíše prawdopodobieństwo albo
- narysuje drzewo tylko z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi opíše prawdopodobieństwo.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

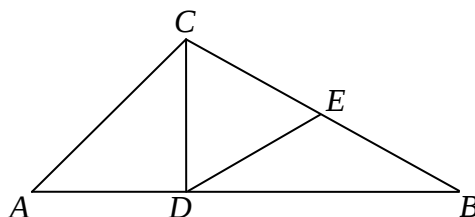
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{13}{25}$ .

**Uwaga**

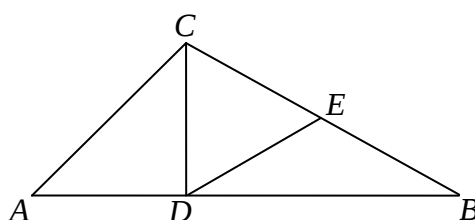
Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

**Zadanie 31. (2 pkt)**

Dany jest trójkąt  $ABC$ . Odcinek  $CD$  jest wysokością tego trójkąta, punkt  $E$  jest środkiem boku  $BC$  (tak jak na rysunku) i  $|CD| = |DE|$ . Udowodnij, że trójkąt  $CDE$  jest równoboczny.



**Rozwiązanie (I sposób)**



Trójkąt  $CDB$  jest prostokątny, a punkt  $E$  jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli punkt  $E$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $CDB$ . Stąd wynika, że  $|DE| = |BE| = |CE|$ . Z treści zadania wiemy, że  $|CD| = |DE|$ , zatem trójkąt  $CDE$  jest równoboczny. Co należało udowodnić.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

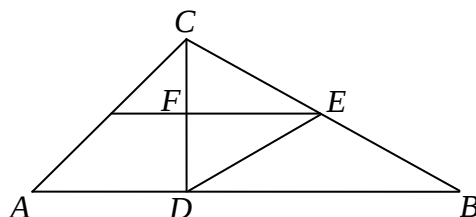
gdy stwierdzi, że punkt  $E$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $CDB$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt  $CDE$  jest równoboczny.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Rysujemy prostą równoległą do podstawy  $AB$  przechodzącą przez punkt  $E$ . Otrzymujemy trójkąt  $CFE$ , który jest podobny do trójkąta  $CDB$  w skali  $k = \frac{1}{2}$ .



Odcinek  $EF$  jest wysokością trójkąta  $CDE$ , która dzieli podstawę  $CD$  na dwie równe części. Stąd trójkąt  $CDE$  jest równoramienny i  $|DE|=|CE|$ . Z treści zadania wiemy, że  $|CD|=|DE|$ , zatem trójkąt  $CDE$  jest równoboczny, co należało udowodnić.

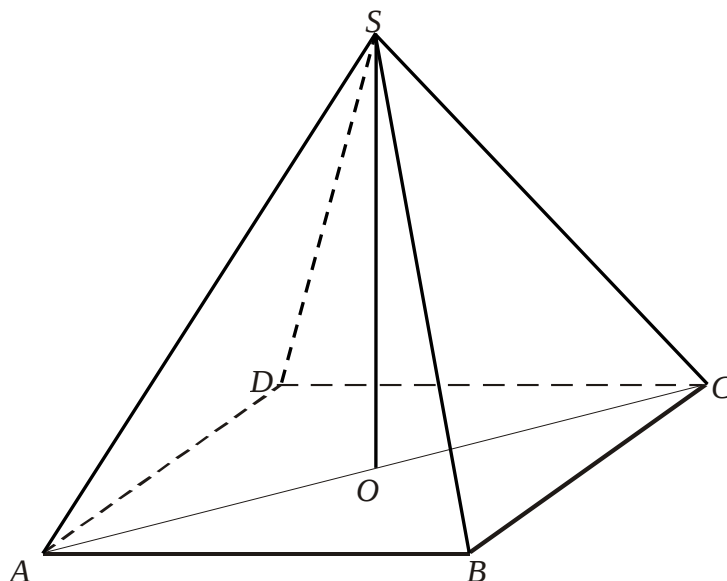
**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy narysuje prostą równoległą do podstawy  $AB$  i zauważy, że trójkąty  $CFE$  i  $CDB$  są podobne w skali  $k = \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

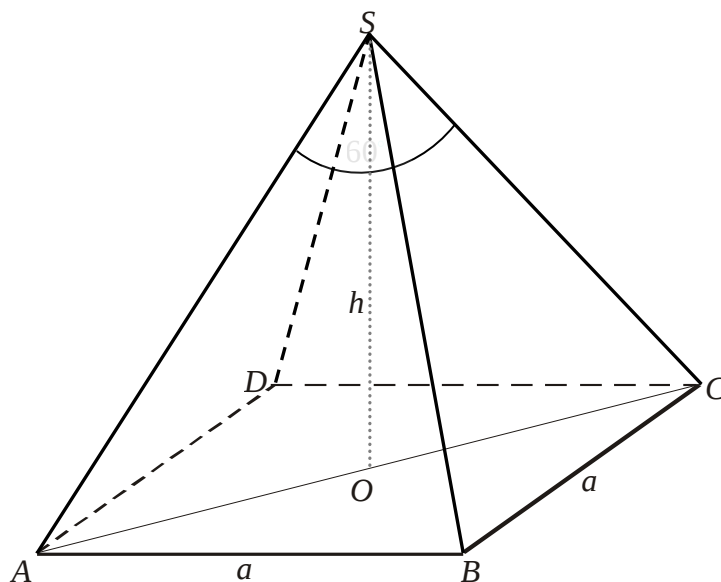
**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt  $CDE$  jest równoboczny.

**Zadanie 32. (4 pkt)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCD S$  (zobacz rysunek) przekątna  $AC$  podstawy ma długość  $4\sqrt{2}$ . Kąt  $ASC$  między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa jest równy  $60^\circ$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



**Rozwiązanie**



Niech  $a$  oznacza krawędź podstawy ostrosłupa, wtedy  $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ . Stąd  $a = 4$ .  
Obliczamy pole  $P$  podstawy ostrosłupa:  $P = a^2 = 16$ .

W trójkącie  $AOS$  kąt  $ASO$  jest równy  $30^\circ$ , a  $|AO| = \frac{1}{2}|AC| = 2\sqrt{2}$ .

Obliczamy wysokość  $SO$  ostrosłupa:  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|AO|}{|SO|} = \frac{2\sqrt{2}}{|SO|}$ , czyli  $|SO| = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$ .

Uwaga

Zdający może zauważyć, że trójkąt ACS jest równoboczny i jego bok ma długość  $4\sqrt{2}$ , więc zastosowanie wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym pozwala obliczyć wysokość

ostrosłupa:  $|SO| = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$ .

Obliczamy objętość  $V$  ostrosłupa:  $V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{32\sqrt{6}}{3}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

Obliczenie długości krawędzi podstawy  $|AB| = a = 4$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie pola  $P$  podstawy:  $P = 16$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Obliczenie wysokości ostrosłupa  $|SO| = 2\sqrt{6}$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Obliczenie objętości  $V$  ostrosłupa:  $V = \frac{32\sqrt{6}}{3}$ .

### Zadanie 33. (5 pkt)

Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

#### Uwaga

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych  $v$ ,  $t$  oznaczających, odpowiednio, prędkość i czas dla pana Nowaka. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

#### Rozwiązanie I sposób

Przyjmujemy oznaczenia  $v$  i  $t$  – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Nowaka.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Nowaka:  $v \cdot t = 150$ .

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Kowalskiego:  $v - 11$ ,  $t + 1\frac{5}{6}$ .

Zapisujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} v \cdot t = 150 \\ (v - 11) \cdot \left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t = \frac{150}{v}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $v = \frac{150}{t}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| $(v - 11) \cdot \left(\frac{150}{v} + 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>v^2 - 11v - 900 = 0</math>.<br/> <math>\Delta = 121 + 3600 = 61^2</math><br/> <math>v_1 = \frac{11 - 61}{2} = -25</math>, sprzeczne z zał. <math>v &gt; 0</math><br/> <math>v_2 = \frac{11 + 61}{2} = 36 \text{ (km/h)}</math><br/> obliczamy prędkość drugiego rowerzysty<br/> <math>v - 11 = 25 \text{ (km/h)}</math></p> | $\left(\frac{150}{t} - 11\right) \cdot \left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>66t^2 + 121t - 1650 = 0</math>.<br/> <math>\Delta = 14641 + 435600 = 671^2</math><br/> <math>t_1 = \frac{-121 - 671}{132} = -6</math>, sprzeczne z zał. <math>t &gt; 0</math><br/> <math>t_2 = \frac{-121 + 671}{132} = 4\frac{1}{6} \text{ (h)}</math><br/> obliczamy prędkość pana Nowaka<br/> <math>v = \frac{150}{4\frac{1}{6}} = 36 \text{ (km/h)}</math><br/> obliczamy prędkość drugiego rowerzysty<br/> <math>v - 11 = 25 \text{ (km/h)}</math></p> |
| Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

### **Rozwiązanie II sposób**

Przyjmujemy oznaczenia  $v$  i  $t$  – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Kowalskiego.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Kowalskiego:  $v \cdot t = 150$ .

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Nowaka:  $v+11$ ,  $t-1\frac{5}{6}$ .

Zapisujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} (v+11) \cdot \left(t-1\frac{5}{6}\right) = 150 \\ v \cdot t = 150 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy

| $t = \frac{150}{v}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $v = \frac{150}{t}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| $(v+11) \cdot \left(\frac{150}{v} - 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>v^2 + 11v - 900 = 0</math>.<br/> <math>\Delta = 121 + 3600 = 61^2</math><br/> <math>v_1 = \frac{-11-61}{2} = -36</math>, sprzeczne z zał. <math>v &gt; 0</math><br/> <math>v_2 = \frac{-11+61}{2} = 25</math> (km/h)<br/>                     obliczamy prędkość pana Nowaka<br/> <math>v+11 = 36</math> (km/h)</p> | $\left(\frac{150}{t} + 11\right) \cdot \left(t - 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>66t^2 - 121t - 1650 = 0</math>.<br/> <math>\Delta = 49 + 3920 = 63^2</math><br/> <math>t_1 = \frac{121-671}{132} = -4\frac{1}{6}</math>, sprzeczne z zał.<br/> <math>t &gt; 0</math><br/> <math>t_2 = \frac{121+671}{132} = 6</math> (h)<br/>                     obliczamy prędkość pana Kowalskiego<br/> <math>v = \frac{150}{6} = 25</math> (km/h)<br/>                     obliczamy prędkość pana Nowaka<br/> <math>v+11 = 36</math> (km/h)</p> |
| Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

### **Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednego z rowerzystów oraz prędkości i czasu dla obu rowerzystów przy użyciu tych samych oznaczeń,  
 np.: dla pana Nowaka  $v \cdot t = 150$ , czas pana Kowalskiego  $t+1\frac{5}{6}$ , prędkość pana Kowalskiego  $v-11$ .  
 lub: dla pana Kowalskiego  $v \cdot t = 150$ , czas pana Nowaka  $t-1\frac{5}{6}$ , prędkość pana Nowaka  $v+11$ .

### **Uwaga**

Nie wymagamy opisanie oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$  – odpowiednio z prędkością i czasem dla

pana Nowaka: 
$$\begin{cases} v \cdot t = 150 \\ (v-11) \cdot \left(t+1\frac{5}{6}\right) = 150 \end{cases}$$

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$  – odpowiednio z prędkością i czasem dla

pana Kowalskiego: 
$$\begin{cases} (v+11) \cdot \left(t-1\frac{5}{6}\right) = 150 \\ v \cdot t = 150 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$$(v-11) \cdot \left(\frac{150}{v} + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \text{ lub } \left(\frac{150}{t} - 11\right) \cdot \left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \text{ lub } (v+11) \cdot \left(\frac{150}{v} - 1\frac{5}{6}\right) = 150$$

$$\text{lub } \left(\frac{150}{t} + 11\right) \cdot \left(t - 1\frac{5}{6}\right) = 150.$$

**Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $v$  z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości drugiego rowerzysty

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $t$  bezbłędnie i nieobliczenie prędkości rowerzystów

albo

- obliczenie  $t$  z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu rowerzystów.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Obliczenie prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkość tylko jednego z rowerzystów: 36 km/h lub 25 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h, to otrzymuje **1 pkt.**

3. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozumowania i stosuje je konsekwentnie.

### Zadanie 34. (4 pkt)

Podstawą trójkąta równoramiennego  $ABC$  jest bok  $AB$ , gdzie  $A = (2, 1)$  i  $B = (5, 2)$ . Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu  $2x - y - 3 = 0$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .

#### Rozwiązanie

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $\frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$ . Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej  $AB$  jest równy  $(-3)$ . Symetralna odcinka  $AB$  ma równanie  $y = -3x + b$ . Punkt  $S = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt  $S$ , więc  $\frac{3}{2} = -3 \cdot \frac{7}{2} + b$ , stąd  $b = 12$ . Zatem symetralna odcinka  $AB$  ma równanie  $y = -3x + 12$ .

Obliczamy współrzędne wierzchołka  $C$  rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y = -3x + 12 \end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu  $C$  są równe:  $C = (3, 3)$ .

#### Schemat oceniania rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku  $AB$ :  $S = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

albo

- poprawne wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$ :  $a = \frac{1}{3}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Wyznaczenie równania symetralnej boku  $AB$ :  $y = -3x + 12$ .

Uwaga

Zdający może wyznaczyć równanie symetralnej stosując jej własność:  $|AC| = |BC|$ , gdzie

$C = (x, y)$  jest dowolnym punktem tej symetralnej. Wówczas otrzymuje:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} \quad \text{stąd} \quad 3x + y - 12 = 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zapisanie układu równań  $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y = -3x + 12 \end{cases}$  i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu  $C$ .

**Rozwiązanie prawie pełne..... 3 pkt**

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współczynnika kierunkowego prostej  $AB$  i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu  $C$ .

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku  $AB$  i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu  $C$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (3, 3)$ .

**II sposób rozwiązania**

Obliczamy współrzędne wektora  $AB$  który jest prostopadły do symetralnej odcinka  $AB$ :  $\vec{AB} = [3, 1]$ . Zatem symetralna odcinka  $AB$  ma równanie  $3x + y - b = 0$ . Obliczamy

współrzędne punktu  $S$ , który jest środkiem odcinka  $AB$ :  $S = \left( \frac{5+2}{2}, \frac{2+1}{2} \right) = \left( \frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right)$ . Symetralna

tego odcinka przechodzi przez punkt  $S$ , więc  $3 \cdot \frac{7}{2} + \frac{3}{2} - b = 0$ , stąd  $b = 12$ . Zatem symetralna odcinka  $AB$  ma równanie  $3x + y - 12 = 0$ .

Obliczamy współrzędne wierzchołka  $C$  rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu  $C$  są równe:  $C = (3, 3)$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania zadania.....1 pkt**

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku  $AB$ :  $S = \left( \frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right)$

albo

- poprawne obliczenie współrzędnych wektora  $AB$ :  $\vec{AB} = [3, 1]$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Wyznaczenie równania symetralnej boku  $AB$ :  $y = -3x + 12$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zapisanie układu równań  $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases}$  i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu  $C$ .

**Rozwiązanie prawie pełne..... 3 pkt**

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współrzędnych wektora  $AB$  i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu  $C$ .

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku  $AB$  i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu  $C$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (3, 3)$ .