CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00
Termin egzaminu:	2 czerwca 2026 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z II etapu edukacyjnego, dopisano „SP".

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.4) stosuje […] prawa działań na potęgach […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej; II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $7^n+7^{n+1}+7^{n+2}$ do postaci $7^n\cdot(1+7+7^2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Korzystamy z własności działań na potęgach i otrzymujemy:

$$7^n+7^{n+1}+7^{n+2}=7^n+7^n\cdot 7+7^n\cdot 7^2$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias i otrzymujemy:

$$7^n+7^n\cdot 7+7^n\cdot 7^2=7^n\cdot(1+7+7^2)=7^n\cdot 57=19\cdot 3\cdot 7^n$$

Liczba $3\cdot 7^n$ jest liczbą całkowitą dla każdej liczby całkowitej $n\geq 0$, zatem liczba $7^n+7^{n+1}+7^{n+2}$ jest podzielna przez 19 dla każdej liczby całkowitej $n\geq 0$.

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: II.2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje […] nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1}=\frac{x+3}{2x-1}$; III.4) rozwiązuje równania […] kwadratowe. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego […].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody tj. rozwiązanie równania $\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+3}{3x}$ w zbiorze liczb rzeczywistych **oraz** wskazanie tego z rozwiązań równania, które należy do przedziału $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$: $x=-\frac{3}{4}$.

2 pkt – rozwiązanie równania $\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+3}{3x}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x=-\frac{3}{4}$ oraz $x=-\frac{1}{2}$.

1 pkt – przekształcenie równania $\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+3}{3x}$ do równania kwadratowego, np. $(3x+4)\cdot 3x=(x-1)\cdot(x+3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe przy przekształcaniu równania i otrzyma równanie kwadratowe postaci $ax^2+bx+c=0$, które ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający nie spełni kryterium za 1 punkt, a przy przekształcaniu równania popełnia błędy i otrzyma równanie kwadratowe postaci $ax^2+bx+c=0$, które nie ma rozwiązań rzeczywistych, albo otrzyma równanie, które nie jest kwadratowe, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający, przekształcając równanie wymierne do równania kwadratowego, zastosuje błędną metodę - np. zapisze $(3x+4)\cdot(x+3)=(x-1)\cdot 3x$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że $0 \notin \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ oraz $1 \notin \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$.

Przekształcamy równanie:

$$\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+3}{3x}$$

$$(3x+4) \cdot 3x = (x-1) \cdot (x+3)$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$9x^2 + 12x = x^2 + 3x - x - 3$$

$$8x^2 + 10x + 3 = 0$$

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $8x^2 + 10x + 3$:

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 100 - 96 = 4$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = -\frac{3}{4} \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$$

$$x_2 = \frac{-10 + \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = -\frac{1}{2} \notin \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$$

Zatem jedynym rozwiązaniem równania $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+3}{3x}$ w zbiorze $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ jest liczba $\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PF

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] miejsca zerowe […] oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Rozwiązanie

1. 3

2. 2

Zadanie 12.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów […]; V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby […]. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.
1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga:
Uzupełnienie zdania uznaje się za poprawne tylko wtedy, gdy zapisane krańce przedziału są poprawne i można jednoznacznie ustalić, czy przedział zapisany przez zdającego jest otwarty czy domknięty.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że dziedziną funkcji f jest przedział $(4, -5]$, to otrzymuje **1 punkt** za tak uzupełnione zdanie.

Rozwiązanie

1. $[-5, 4)$

2. $\left[-\frac{7}{2}, 3\right]$

Zadanie 13.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 13.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 14.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 14.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny […]; VI.3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Zadanie 15. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_2 = \frac{34}{3}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r, np.
$7 + 7 + r + 7 + 2r + 7 + 3r = 54$
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2, np.
$3a_2 + 3(a_2 - 7) = 47$,
ALBO
– obliczenie trzeciego wyrazu ciągu: $a_3 = \frac{47}{3}$,
ALBO
– obliczenie czwartego wyrazu ciągu: $a_4 = 20$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający wypisze wszystkie cztery wyrazy rozpatrywanego ciągu arytmetycznego $\left(7,\ \frac{34}{3},\ \frac{47}{3},\ 20\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.
Stąd i ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie:

$$7 + 7 + r + 7 + 2r + 7 + 3r = 54$$

$$28 + 6r = 54$$

$$6r = 26$$

$$r = \frac{13}{3}$$

Zatem:

$$a_2 = 7 + r = 7 + \frac{13}{3} = \frac{34}{3}$$

Sposób II

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.
Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$a_2 = 7 + r$$

Stąd:

$$r = a_2 - 7$$

Wtedy:

$$a_3 = a_2 + r = a_2 + a_2 - 7 = 2a_2 - 7$$

$$a_4 = a_2 + 2r = a_2 + 2(a_2 - 7) = 3a_2 - 14$$

Przekształcamy równanie $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$ do równania z jedną niewiadomą a_2:

$$7 + a_2 + (2a_2 - 7) + (3a_2 - 14) = 54$$

$$6a_2 - 14 = 54$$

$$6a_2 = 68$$

$$a_2 = \frac{34}{3}$$

Sposób III

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.
Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$a_2 = a_3 - r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

Przekształcamy równanie $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$ do równania z jedną niewiadomą a_3:

$$7 + (a_3 - r) + a_3 + (a_3 + r) = 54$$

$$7 + 3a_3 = 54$$

$$3a_3 = 47$$

$$a_3 = \frac{47}{3}$$

Korzystamy z własności sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego i obliczamy a_2:

$$a_2 = \frac{7 + \frac{47}{3}}{2} = \frac{68}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{34}{3}$$

Sposób IV

Z treści zadania wynika, że $7 + a_2 + a_3 + a_4 = 54$.

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\frac{7 + a_4}{2} \cdot 4 = 54$$

$$7 + a_4 = 27$$

$$a_4 = 20$$

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$20 = 7 + 3r$$

$$r = \frac{13}{3}$$

Zatem:

$$a_2 = 7 + r = 7 + \frac{13}{3} = \frac{34}{3}$$

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.12) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 20. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie, że $|AE| = |DE|$

ALBO

– zapisanie, że $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle ADE|$,

ALBO

– zapisanie, że $|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle DBE|$,

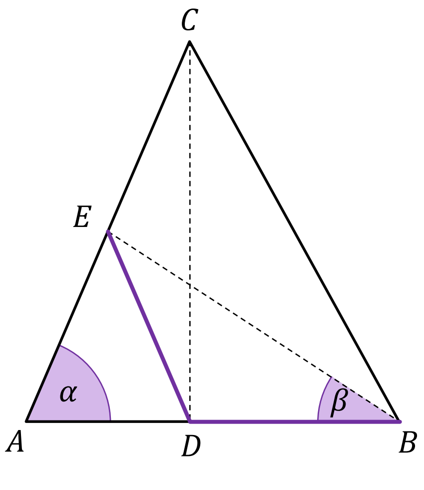
ALBO

– wyznaczenie zależności między miarami kątów ADE i ABE, np. $|\sphericalangle ADE| = 2 \cdot |\sphericalangle ABE|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ABE| = \beta$ (zobacz rysunek). Wtedy tezę możemy zapisać w postaci $\alpha = 2\beta$.



Z równości $|DB| = |DE|$ wynika, że trójkąt DBE jest równoramienny. Stąd:

$$|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle DBE| = \beta$$

Zatem z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta wynika, że:

$$|\sphericalangle EDB| = 180^\circ - 2\beta$$

Trójkąt ADC jest prostokątny i punkt E jest środkiem jego przeciwprostokątnej (tzn. że punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADC), więc:

$$|AE| = |DE| = |CE|$$

Stąd wynika, że trójkąt ADE jest równoramienny, zatem:

$$|\measuredangle ADE| = |\measuredangle EAD| = \alpha$$

Kąty ADE i EDB są przyległe, więc:

$$\alpha = |\measuredangle ADE| = 180° - |\measuredangle EDB| = 180° - (180° - 2\beta) = 2\beta$$

Zatem $\alpha = 2\beta$. To kończy dowód.

Uwaga.
Równość $|\measuredangle ADE| = 2\beta$ możemy też otrzymać, korzystając z twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta.

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 22. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje. SP X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. 4) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $S=(11,18)$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu B: $B=(16,17)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{DC} boku DC: $M_{DC}=(12,22)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{AD} boku AD **oraz** obliczenie współrzędnych środka M_{KD} odcinka KD: $M_{AD}=(5,15)$, $M_{KD}=\left(8,\frac{33}{2}\right)$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{AD}$ (lub $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$):

$\overrightarrow{AD}=[2,8]$ (lub $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}=[1,4]$),

ALBO

– wyznaczenie równań <u>dwóch</u> prostych przecinających się w punkcie S, np.

$y=4x-26$ (równanie prostej równoległej do AD) oraz

$y=\frac{1}{2}x+\frac{25}{2}$ (równanie prostej równoległej do AB),

ALBO

– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć jedną ze współrzędnych punktu S, np.:

$$\frac{x_B+6}{2}=x_S \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{1}{2}x_B+9+19}{2}=4x_S-26,$$

$$\frac{x_B+6}{2}=x_S \quad \text{oraz} \quad \frac{y_B+19}{2}=y_S \quad \text{oraz} \quad y_B=\frac{1}{2}x_B+9 \quad \text{oraz} \quad y_S=4x_S-26.$$

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu A: $A=(4,11)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka M_{KD} odcinka KD: $M_{KD} = \left(8, \frac{33}{2}\right)$,

ALBO

– wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkt S, np.

$y = 4x - 26$ (równanie prostej równoległej do AD),

ALBO

– zapisanie zależności między odpowiednimi współrzędnymi punktów B, D oraz S:

$\frac{x_B + 6}{2} = x_S$ oraz $\frac{y_B + 19}{2} = y_S$ **oraz** zapisanie współrzędnych punktu B w zależności od jednej zmiennej (x_B lub y_B), np. $B = \left(x_B, \frac{1}{2}x_B + 9\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej,
b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych równoległych,
c) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współrzędne środka odcinka,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie. Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–c), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 9 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}x + 9 = 4x - 5$$

$$\frac{7}{2}x = 14$$

$$x = 4$$

$$y = 11$$

Zatem $A = (4, 11)$.

Punkt K jest środkiem odcinka AB, więc:

$$\frac{4 + x_B}{2} = 10 \quad \text{oraz} \quad \frac{11 + y_B}{2} = 14$$

$$x_B = 16 \quad \text{oraz} \quad y_B = 17$$

Zatem $B = (16, 17)$.

Punkt $S = (x_S, y_S)$ jest środkiem odcinka BD, więc:

$$x_S = \frac{16+6}{2} = 11 \quad \text{oraz} \quad \frac{17+19}{2} = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Sposób II

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 9 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}x + 9 = 4x - 5$$

$$\frac{7}{2}x = 14$$

$$x = 4$$

$$y = 11$$

Zatem $A = (4, 11)$.

Prosta SK jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SK jest równy 4. Wyznaczamy równanie prostej SK:

$$y = 4(x - 10) + 14$$

$$y = 4x - 26$$

Oznaczmy przez M_{AD} środek odcinka AD. Obliczmy współrzędne punktu M_{AD}:

$$M_{AD} = \left(\frac{4+6}{2}\ ,\ \frac{11+19}{2}\right) = (5, 15)$$

Prosta SM_{AD} jest równoległa do prostej AB, zatem współczynnik kierunkowy prostej SM_{AD} jest równy $\frac{1}{2}$. Wyznaczamy równanie prostej SM_{AD}:

$$y = \frac{1}{2}(x - 5) + 15$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

Punkt S jest punktem wspólnym prostych SK i SM_{AD}, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = 4x - 26 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2} \end{cases}$$

Stąd:

$$4x - 26 = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{77}{2}$$

$$x = 11$$

$$y = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Sposób III

Prosta SK jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SK jest równy 4. Wyznaczamy równanie prostej SK:

$$y = 4(x - 10) + 14$$

$$y = 4x - 26$$

Punkt S leży na prostej o równaniu $y = 4x - 26$, stąd $y_S = 4x_S - 26$.

Punkt B leży na prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 9$, stąd $y_B = \frac{1}{2}x_B + 9$.

Punkt S jest środkiem odcinka BD, więc:

$$\frac{x_B + x_D}{2} = x_S \quad \text{oraz} \quad \frac{y_B + y_D}{2} = y_S$$

Zatem:

$$\frac{x_B + 6}{2} = x_S \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{1}{2}x_B + 9 + 19}{2} = 4x_S - 26$$

$$x_B = 2x_S - 6 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}x_B + 28 = 8x_S - 52$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(2x_S - 6) + 28 = 8x_S - 52$$

$$x_S - 3 + 28 = 8x_S - 52$$

$$7x_S = 77$$

$$x_S = 11$$

Wtedy:

$$y_S = 4x_S - 26 = 4 \cdot 11 - 26 = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Sposób IV

Punkt A jest punktem wspólnym prostych AB i AD, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 9 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}x + 9 = 4x - 5$$

$$\frac{7}{2}x = 14$$

$$x = 4$$

$$y = 11$$

Zatem $A = (4, 11)$.

Zauważmy, że $\overrightarrow{KS} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$. Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{KS}$ oraz $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{KS} = [x_S - 10,\ \ y_S - 14]$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot [6 - 4,\ \ 19 - 11] = \frac{1}{2} \cdot [2, 8] = [1, 4]$$

Stąd:

$$x_S - 10 = 1 \text{ oraz } y_S - 14 = 4$$

$$x_S = 11 \text{ oraz } y_S = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Sposób V

Prosta SK jest równoległa do prostej AD, zatem współczynnik kierunkowy prostej SK jest równy 4. Wyznaczamy równanie prostej SK:

$$y = 4(x - 10) + 14$$

$$y = 4x - 26$$

Oznaczmy przez M_{KD} środek odcinka KD. Obliczmy współrzędne punktu M_{KD}:

$$M_{KD} = \left(\frac{10 + 6}{2}\ ,\ \frac{14 + 19}{2}\right) = \left(8, \frac{33}{2}\right)$$

Prosta SM_{KD} jest równoległa do prostej AB, zatem współczynnik kierunkowy prostej SM_{KD} jest równy $\frac{1}{2}$. Wyznaczamy równanie prostej SM_{KD}:

$$y = \frac{1}{2}(x-8) + \frac{33}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

Punkt S jest punktem wspólnym prostych SK i SM_{KD}, zatem współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = 4x - 26 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2} \end{cases}$$

Stąd:

$$4x - 26 = \frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{77}{2}$$

$$x = 11$$

$$y = 18$$

Zatem $S = (11, 18)$.

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 26. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.5) oblicza […] pola powierzchni […] stożka […]; X.4) rozpoznaje […] w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Zadanie 27. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) rozpoznaje w walcach […] kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami […]; X.5) oblicza objętości i pola powierzchni […] walca […] również z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $V = 18\pi\sqrt{3}$, $P_c = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie objętości walca: $V = 18\pi\sqrt{3}$

ALBO

– obliczenie pola powierzchni całkowitej walca: $P_c = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$.

2 pkt – zapisanie promienia podstawy walca (lub średnicy podstawy walca): $r = 3$ (lub $2r = 6$) **oraz** zapisanie wysokości walca: $H = 2\sqrt{3}$

ALBO

– obliczenie kwadratu promienia podstawy walca (lub kwadratu średnicy podstawy walca): $r^2 = 9$ (lub $(2r)^2 = 36$) **oraz** zapisanie wysokości walca: $H = 2\sqrt{3}$.

1 pkt – zapisanie promienia podstawy walca (lub średnicy podstawy walca): $r = 3$ (lub $2r = 6$)

ALBO

– zapisanie wysokości walca: $H = 2\sqrt{3}$,

ALBO

– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć r oraz H, np.:

$H = x$ oraz $2r = x\sqrt{3}$ oraz $2x = 4\sqrt{3}$,

$\frac{H}{4\sqrt{3}} = \sin 30°$ oraz $\frac{2r}{4\sqrt{3}} = \cos 30°$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

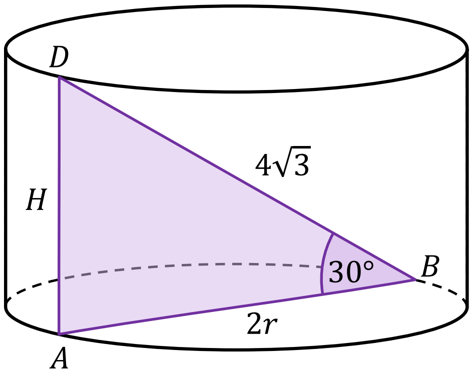
a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej,
b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$,
d) błędne zastosowanie własności trójkąta o kątach $30°$, $60°$, $90°$ (tzn. zapisanie, że średnica podstawy walca jest równa $2\sqrt{3}$ i wysokość walca jest równa 6),

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za konsekwentne obliczenie objętości i pola powierzchni całkowitej walca).
Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–d), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:
r – promień podstawy walca,
H – wysokość walca.

Zauważamy, że kąt DAB jest prosty oraz $r > 0$ i $H > 0$.



W trójkącie prostokątnym ABD mamy:

$$\sin 30^\circ = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{H}{4\sqrt{3}}$$

Zatem:

$$H = 4\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ponadto:

$$\cos 30^\circ = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{2r}{4\sqrt{3}} = \frac{r}{2\sqrt{3}}$$

Stąd:

$$r = 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Obliczamy objętość V walca:

$$V = \pi r^2 H = \pi \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{3} = 18\pi\sqrt{3}$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c walca:

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 18\pi + 12\pi\sqrt{3}$$

Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 29. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) oblicza […] średnią ważoną […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 30. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) […] znajduje medianę […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A)=\frac{7}{30}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega|=6\cdot 5$

ALBO

– sporządzenie tabeli o 36 polach, z których 6 jest wykreślonych a pozostałe 30 odpowiada zdarzeniom elementarnym,

ALBO

– sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego,

ALBO

– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=7$, o ile nie zostały zliczone błędne pary,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A, **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

ALBO

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{30}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A)=\frac{7}{30}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 7 lub 30 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający rozważa losowanie ze zwracaniem, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x, y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $x \neq y$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy, korzystając z reguły mnożenia:

$$|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$$

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
$(4, 5), (4, 6), (4, 7), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 7)$, więc $|A| = 7$.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{7}{30}$.

Sposób II

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x, y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $x \neq y$.

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

Druga wylosowana liczba

Pierwsza wylosowana liczba

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2						
3						
4				$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
5						
6		$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$		$\mathcal{A}$
7						

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest 30. Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 7.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{7}{30}$.

Zadanie 32. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki, np.
$P(x) = x^2 - 2x + 8$ oraz $x = 1$.

2 pkt – wyznaczenie poprawnego wzoru na pole trójkąta DEF w zależności od zmiennej x,
np. $P(x) = 16 - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (4 - x) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 - 2x)$.

1 pkt – zapisanie wzoru na pole trójkąta DEF w zależności od pól trójkątów EBF, FCD, DAE, np. $P_{DEF} = 4^2 - P_{EBF} - P_{FCD} - P_{DAE}$

ALBO

– zapisanie pól <u>co najmniej dwóch</u> spośród trójkątów EBF, FCD, DAE w zależności od zmiennej x, np.:

$P_{EBF} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (4 - x)$ oraz $P_{FCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x$,

$P_{FCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x$ oraz $P_{DAE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 - 2x)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze jedynie, że szukaną wartością x jest liczba 1, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający nie zapisze pola trójkąta DEF jako funkcji P zmiennej x, a jedynie obliczy wartości pola dla wybranych długości odcinka CF i na tej podstawie wskaże najmniejszą wartość pola, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

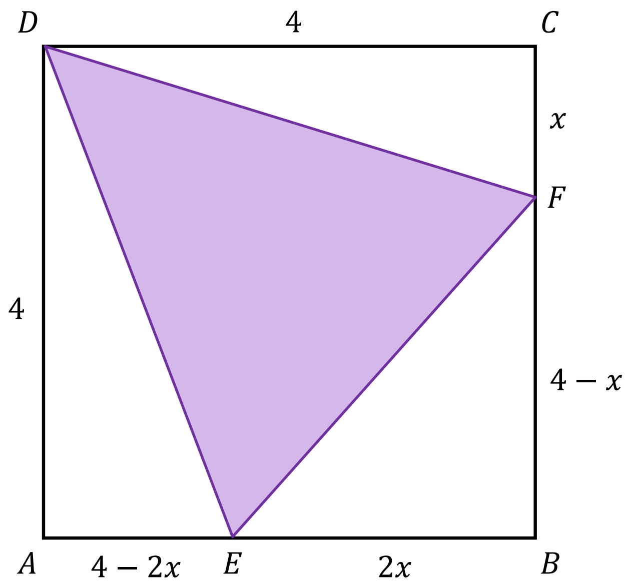
3. Jeżeli zdający stosuje rachunek różniczkowy i nie uzasadni, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest najmniejsza wartość funkcji P, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
Za poprawne uzasadnienie, że w punkcie będącym miejscem zerowym pochodnej funkcji P jest najmniejsza wartość funkcji P, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej (np. szkicuje wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznacza na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej), **oraz**:
– opisuje przedziały monotoniczności funkcji P (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek)
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma minimum

lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonego miejsca zerowego pochodnej, funkcja P ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

4. Jeżeli zdający nie zapisze, że 1 należy do dziedziny funkcji P, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że
$|AD| = |DC| = 4$
$|CF| = x$
$|EB| = 2x$
$|AE| = 4 - 2x$
$|BF| = 4 - x$
(zobacz rysunek).



Wówczas pola trójkątów EBF, FCD, DAE w zależności od zmiennej x są równe:

$$P_{EBF} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (4 - x) = 4x - x^2$$

$$P_{FCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x = 2x$$

$$P_{DAE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 - 2x) = 8 - 4x$$

Pole P trójkąta DEF jest różnicą pola kwadratu $ABCD$ i sumy pól trójkątów EBF, FCD oraz DAE. Zatem:

$$P(x) = 4^2 - (4x - x^2 + 2x + 8 - 4x)$$

$$P(x) = 16 - (-x^2 + 2x + 8)$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 8$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do góry.
Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$p = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1 \in (0, 2)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla argumentu 1.
Pole trójkąta DEF jest najmniejsze, gdy $|CF| = 1$.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin dodatkowy 2026.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka
   - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów wynikających ze zmiany znaku liczby należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych, lub zapisze zależności pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 5.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}$ do postaci $7^n + 7^n \cdot 7 + 7^n \cdot 7^2$.

Zadanie 8.

Uwaga:

Jeżeli zdający popełnia błąd przy przekształceniu równania $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+3}{3x}$ do postaci równania kwadratowego, lecz dalej stosuje poprawną metodę rozwiązania otrzymanego równania kwadratowego i konsekwentnie oblicza pierwiastki tego równania, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 12.1.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 12.2.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 15.

1 pkt – zapisanie związku $a_2 = 7 + r$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_4, np. $\frac{7+a_4}{2} \cdot 4 = 54$.

Zadanie 20.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 22.

1 pkt – zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka A, np. $\frac{1}{2}x + 9 = 4x - 5$.

Zadanie 27.

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach $30°, 60°, 90°$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością walca lub promieniem podstawy walca), np.: $\frac{H}{4\sqrt{3}} = \sin 30°$, $\frac{2r}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 30 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) <u>nie stosuje się</u> uwagi 1. ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 8$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{8}{30}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32.

1 pkt – zapisanie pola jednego spośród trójkątów EBF, FCD, DAE w zależności od zmiennej x, np. $P_{FCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x$

ALBO

– obliczenie pola kwadratu $ABCD$ **oraz** zapisanie długości odcinków AE i BF w zależności od zmiennej x: $P_{ABCD} = 16$ oraz $|AE| = 4 - 2x$ oraz $|BF| = 4 - x$.