CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2016

Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	**A**	**D**

Zadanie 2. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	**D**	**A**

Zadanie 3. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	**A**	**B**

Zadanie 4. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	**A**	**D**

Zadanie 5. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).	**C**	**D**

Zadanie 6. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).	**C**	**A**

Zadanie 7. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	**D**	**B**

Zadanie 8. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).	**D**	**A**

Zadanie 9. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.8).	**A**	**C**

Zadanie 10. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – zbiór wartości (4.3).	**D**	**B**

Zadanie 11. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą (4.3).	**B**	**A**

Zadanie 12. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu (4.2).	**B**	**D**

Zadanie 13. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (6.2).	**A**	**C**

Zadanie 14. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	**A**	**B**

Zadanie 15. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2).	**D**	**C**

Zadanie 16. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	**B**	**C**

Zadanie 17. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.5).	**C**	**B**

Zadanie 18. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający ustala możliwość zbudowania trójkąta (SP9.2).	**D**	**A**

Zadanie 19. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych (7.2).	**B**	**C**

Zadanie 20. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 21. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.6).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**C**

Zadanie 22. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**B**

Zadanie 23. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i stożkach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.3).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**B**

Zadanie 24. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.2).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**A**

Zadanie 25. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia (1.7).

Przykładowe rozwiązanie

Obliczamy średni roczny przyrost sosny: $\overline{x} = 8\frac{1}{3}$.

Obliczamy błąd względny przybliżenia: $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{3}} = \dfrac{1}{25} = 0,04 = 4\%$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

- gdy obliczy średni roczny przyrost wysokości sosny: $\overline{x} = 8\frac{1}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- gdy otrzyma średni roczny przyrost wysokości sosny będący liczbą spełniającą nierówność $7 < \overline{x} < 8,2(3)$ lub nierówność $8,4(3) < \overline{x} < 10$ i konsekwentnie obliczy błąd względny otrzymanego przybliżenia.

Uwaga:
Akceptujemy wynik przybliżony z przedziału $\langle 8,2(3); 8,4(3) \rangle$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy błąd względny przybliżenia: 4%.

Zadanie 27. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na ustaleniu pierwiastków trójmianu kwadratowego. Drugi etap polega na ustaleniu zbioru rozwiązań nierówności.

Realizacja pierwszego etapu

I sposób

Redukujemy wyrazy podobne i zapisujemy nierówność w postaci równoważnej

$$-x^2+2x>0.$$

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2+2x$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta=4-4\cdot(-1)\cdot 0=4$ i stąd $x_1=\frac{-2-2}{-2}=2$ oraz $x_2=\frac{-2+2}{-2}=0$

albo

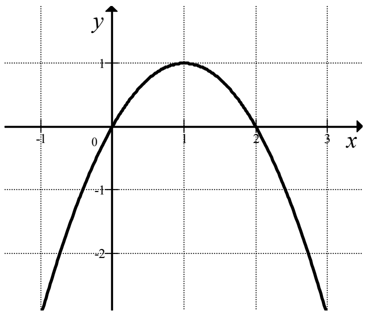
- wykorzystujemy postać iloczynową trójmianu $-x^2+2x$:
  $-x(x-2)=0$, stąd $x_1=0$ oraz $x_2=2$,

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1\cdot x_2=0$ oraz $x_1+x_2=2$, stąd $x_1=0$ oraz $x_2=2$,

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu $x_1=0$, $x_2=2$ lub zaznaczając je na wykresie



II sposób

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego $-x^2+2x$ i zapisujemy nierówność w postaci równoważnej, np.

$$-(x-1)^2+1>0.$$

Stąd

$$-\left((x-1)^2-1\right)>0.$$

Następnie przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej

$$(x-1)^2<1,$$

$$|x-1|<1.$$

Realizacja drugiego etapu

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(0,2)$ lub $x\in(0,2)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania, tzn. ustali pierwiastki trójmianu kwadratowego i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = -x^2 + 2x$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- zapisze nierówność $|x-1|<1$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- przy realizacji pierwszego etapu rozwiązania popełni błąd (ten sam błąd popełniony wielokrotnie traktuje się jak jeden błąd), ale otrzyma dwa różne pierwiastki, i konsekwentnie rozwiąże nierówność, np.:
  - popełni błędy przy wyznaczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np. $x_1 + x_2 = -2$ i konsekwentnie rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze nierówność, np. $|x-1|>1$ i konsekwentnie ją rozwiąże.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

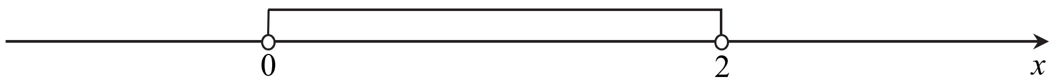
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(0,2)$ lub $x \in (0,2)$, lub $x > 0$ i $x < 2$

albo

- sporządzi poprawną ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x > 0$, $x < 2$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np. $(2,0)$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$ lub przez x, bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$, rozważając przy tym dwa przypadki $x > 2$ i $x < 2$, rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków oraz wyznaczy poprawny zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 28. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).

Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników $4-x$ oraz $x^2+2x-15$. Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli

$$4-x=0 \text{ lub } x^2+2x-15=0.$$

Rozwiązaniem równania $4-x=0$ jest $x=4$.

Rozwiązania równania $x^2+2x-15=0$ możemy wyznaczyć, korzystając:

- ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego:
  $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-15)=64=8^2$, $x_1=\frac{-2-8}{2}=-5$, $x_2=\frac{-2+8}{2}=3$

albo

- ze wzorów Viète'a:
  $x_1+x_2=-2$ oraz $x_1\cdot x_2=-15$ i stąd $x_1=-5$, $x_2=3$,

albo

- z postaci iloczynowej trójmianu $x^2+2x-15$
  $(x+5)(x-3)=0$, stąd $x_1=-5$, $x_2=3$,

albo

- z własności wartości bezwzględnej, przekształcając najpierw równanie do postaci równoważnej $|x+1|=4$, skąd $x+1=4$ lub $x+1=-4$, czyli $x=3$ lub $x=-5$.

Zatem wszystkie rozwiązania równania to: $x=4$ lub $x=-5$, lub $x=3$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania: $4-x=0$ i $x^2+2x-15=0$ (wystarczy, że z rozwiązania wynika, że zdający wyznacza pierwiastki każdego z wielomianów: $4-x$, $x^2+2x-15$)

albo

- zapisze rozwiązanie $x=4$,

albo

- obliczy co najmniej jeden pierwiastek trójmianu $x^2+2x-15$: $x=-5$, $x=3$,

albo

- wyznaczy jeden z pierwiastków wielomianu $-x^3+2x^2+23x-60$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-5$, $x=3$, $x=4$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający obliczy trzy pierwiastki, ale w odpowiedzi końcowej podaje tylko dwa, to otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania bez stosownego założenia przez $x-4$ lub przez drugi czynnik i oblicza pierwiastki (lub pierwiastek) dla pozostałej części, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Niech $|\sphericalangle ACB| = \alpha$.

Ponieważ $|\sphericalangle CAB| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$.

W ΔCDE : $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$.

Trójkąt *CDE* jest prostokątny oraz $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$.

Podobnie trójkąt *BFG* jest prostokątny i $|\sphericalangle FGB| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle BFG| = \alpha$.

Ponieważ trójkąty *CDE* i *BFG* mają równe kąty, więc na podstawie cechy podobieństwa *kkk* są podobne.

II sposób

Niech $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$.

Trójkąt *CED* jest podobny do trójkąta *ABC* (cecha *kkk*), bo $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DEC| = 90^\circ$.

Podobnie trójkąt *GBF* jest podobny do trójkąta *ABC*, (cecha *kkk*), bo $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$ oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FGB| = 90^\circ$.

Stąd trójkąt *CED* jest podobny do trójkąta *FBG* (z przechodniości relacji podobieństwa).

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- wskaże w dwóch trójkątach spośród trójkątów *CBA*, *CDE* i *FBG* jedną parę równych kątów ostrych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, przy czym kąt przy wierzchołku *B* musi być wskazany dwukrotnie, jako kąt w obu trójkątach *CBA* i *FBG*, np. zdający zapisze $|\sphericalangle FBG| = |\sphericalangle CBA|$ lub stwierdzi, że jest to wspólny kąt trójkątów *CBA* i *FBG* (analogicznie z kątem przy wierzchołku *C* w trójkątach *CBA* i *CDE*)

albo

- zapisze, że trójkąt *CBA* jest podobny do trójkąta *FBG* i do trójkąta *CDE* i stąd wywnioskuje, że trójkąt *CDE* jest podobny do trójkąta *FBG*, ale nie wskaże żadnej pary równych kątów ostrych w tych trójkątach i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje..2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający przyjmie konkretne miary kątów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający przyjmie błędne zależności między kątami, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).

Przykładowe rozwiązanie
Rozważmy wyraz $a_n = 2n^2 + 2n$.
Wyraz a_{n+1} można zapisać, jako

$$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 6n + 4 .$$

Wtedy

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 = 4n^2 + 8n + 4 .$$

Zatem

$$a_n + a_{n+1} = (2n+2)^2 .$$

Liczba $2n+2$ jest naturalna. To kończy dowód.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy poprawnie zapisze sumę dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu, np.

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga:
Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość tezy tylko dla konkretnych wartości *n*, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym oraz wykorzystuje podstawowe własności potęg – również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką (1.6, 1.5).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zapisujemy równanie

$$6,2=\log\frac{A}{10^{-4}}.$$

Korzystamy z definicji logarytmu

$$10^{6,2}=\frac{A}{10^{-4}}.$$

Stąd

$$A=10^{6,2}\cdot 10^{-4},$$

$$A=10^{2,2}.$$

Stwierdzamy, że $10^{2,2}>10^2=100$, gdyż funkcja wykładnicza $y=10^x$ jest rosnąca. Oznacza to, że $A>100$ cm.

II sposób

Zapisujemy równanie

$$6,2=\log\frac{A}{10^{-4}}.$$

To równanie jest równoważne kolejno równaniom

$$6,2=\log\left(10^4 A\right),$$

$$6,2=\log 10^4+\log A,$$

$$6,2=4+\log A.$$

Zatem $2,2=\log A$. Korzystamy z definicji logarytmu i otrzymujemy równość

$$A=10^{2,2}.$$

Stwierdzamy, że $10^{2,2}>10^2=100$, gdyż funkcja wykładnicza $y=10^x$ jest rosnąca. Oznacza to, że $A>100$ cm.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- wykorzysta definicję logarytmu i przekształci równanie $6,2=\log\frac{A}{10^{-4}}$ do postaci $10^{6,2}=\frac{A}{10^{-4}}$

albo

- wykorzysta własność logarytmu i przekształci równanie $6,2=\log\frac{A}{10^{-4}}$ do postaci

  $6,2=\log A-\log 10^{-4}$ lub $6,2=\log A+\log 10^{4}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

gdy zapisze, że $A=10^{2,2}$ i stwierdzi, że amplituda tego trzęsienia ziemi była większa od 100 cm.

Zdający otrzymuje..2 p.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie interpretuje treść zadania, w szczególności stosuje niepoprawne podstawienie do wzoru, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający nie obliczy amplitudy, ale uzasadni, że amplituda jest większa od 100 cm, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający nie obliczy amplitudy tylko zapisze bez uzasadnienia, że amplituda jest większa od 100 cm, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 32. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta (SP9.3). G7. Równania. Zdający rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą (G7.3).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Niech α oznacza najmniejszy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\alpha+50^\circ$ oraz 3α. Suma kątów trójkąta jest równa 180°, więc

$$\alpha+3\alpha+\alpha+50^\circ=180^\circ,$$

$$5\alpha=130^\circ,$$

$$\alpha=26^\circ.$$

Stąd $\alpha+50^\circ=76^\circ$ oraz $3\alpha=78^\circ$.

<u>II sposób</u>

Niech α oznacza największy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\frac{\alpha}{3}+50^\circ$ oraz $\frac{\alpha}{3}$. Suma kątów trójkąta jest równa 180°, więc

$$\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}+50^\circ+\alpha=180^\circ,$$

$$5\alpha=390^\circ,$$

$$\alpha=78^\circ.$$

Stąd $\frac{\alpha}{3}=26^\circ$ oraz $\frac{\alpha}{3}+50^\circ=76^\circ$.

III sposób

Niech α oznacza ten kąt trójkąta, który nie jest ani największy, ani najmniejszy. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\alpha-50^\circ$ oraz $3(\alpha-50^\circ)$. Suma kątów trójkąta jest równa 180°, więc

$$\alpha-50^\circ+\alpha+3(\alpha-50^\circ)=180^\circ,$$
$$5\alpha=380^\circ,$$
$$\alpha=76^\circ.$$

Stąd $\alpha-50^\circ=26^\circ$ oraz $3(\alpha-50^\circ)=78^\circ$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze:

- kąty trójkąta w zależności od jednego kąta, np.:

$$\alpha,\ \alpha+50^\circ,\ 3\alpha \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}+50^\circ, \alpha, \quad \text{lub} \quad \alpha-50^\circ, \alpha, 3(\alpha-50^\circ)$$

albo

- układ dwóch równań, np.

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+50^\circ+\beta=180^\circ \\ \beta=3\alpha, \end{cases}$$

albo

- układ trzech równań, np.

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=180^\circ \\ \gamma=3\alpha \\ \beta=\alpha+50^\circ \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\alpha+3\alpha+\alpha+50^\circ=180^\circ \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}+50^\circ+\alpha=180^\circ, \quad \text{lub} \quad \alpha-50^\circ+\alpha+3(\alpha-50^\circ)=180^\circ$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy jeden z kątów trójkąta, np.: $\alpha=26^\circ$ lub $\alpha=78^\circ$, lub $\alpha=76^\circ$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy wszystkie kąty trójkąta.

Uwagi:

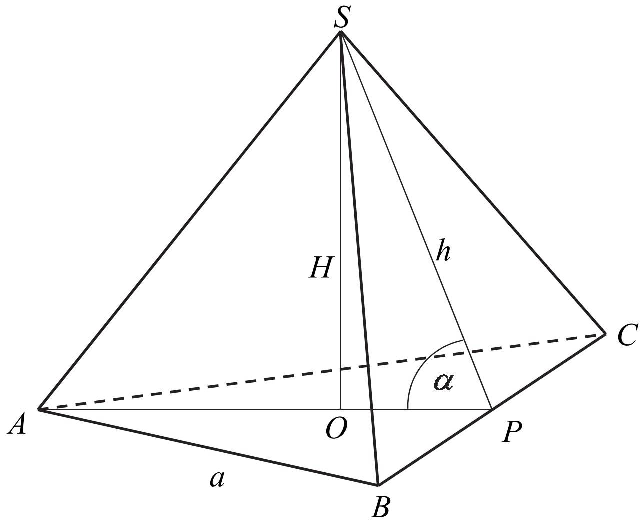
1. Jeżeli zdający tylko poda kąty ($26^\circ, 76^\circ, 78^\circ$), to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający tylko poda kąty i sprawdzi wszystkie warunki zadania, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 33. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7).

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ wysokość tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy, to $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Objętość ostrosłupa jest równa 27, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 27,$$

skąd otrzymujemy $a = 6$.

Wysokość ostrosłupa jest równa

$$H = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC, zatem długość odcinka PO stanowi $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta ABC, czyli

$$|OP| = \tfrac{1}{3}H = \tfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta POS otrzymujemy

$$h^2 = |OP|^2 + H^2,$$

$$h^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2,$$

$$h^2 = 30.$$

Stąd

$$h = \sqrt{30}.$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem równe

$$P_b = 3\cdot\frac{1}{2}ah = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{30} = 9\sqrt{30}\ .$$

Cosinus kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy

$$\cos\alpha = \frac{|OP|}{h} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\ .$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający:

- zapisze równanie, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = 27$$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć wysokość ostrosłupa:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2H}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = 27$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa $a = 6$ lub wysokość ostrosłupa $H = 3\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga:

Zdający może obliczyć od razu tangens kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{\frac{1}{3}H} = 3\,,$$

a następnie obliczyć szukaną wartość cosinusa tego kąta:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}\ .$$

Otrzymuje wtedy **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy

- wysokość ściany bocznej ostrosłupa: $\sqrt{30}$

albo

- długość krawędzi bocznej ostrosłupa: $\sqrt{39}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**
Zdający obliczy:

- pole powierzchni bocznej ostrosłupa *ABCS*: $9\sqrt{30}$

albo

- cosinus kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**
Zdający obliczy pole powierzchni bocznej ostrosłupa *ABCS*: $9\sqrt{30}$ i cosinus kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważa inną bryłę niż podana w zadaniu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny np. w zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa przy obliczaniu wysokości ściany bocznej lub w interpretacji własności trójkąta równobocznego, to otrzymuje za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
3. Akceptujemy poprawne przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych.

Zadanie 34. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x, y) dwóch różnych liczb ze zbioru $\{10,11,12,...,99\}$, który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 90\cdot 89$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30.
Zatem zdarzeniu *A* sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(10,20)$, $(11,19)$, $(12,18)$, $(13,17)$, $(14,16)$, $(16,14)$, $(17,13)$, $(18,12)$, $(19,11)$, $(20,10)$.

Ich liczba jest równa $|A| = 10$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90\cdot 89} = \frac{1}{9\cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

II sposób

Zdarzeniem elementarnym jest zbiór dwuelementowy $\{x,y\}$ dwóch różnych liczb ze zbioru $\{10,11,12,...,99\}$, który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = \binom{90}{2} = \frac{90!}{88!\cdot 2!} = \frac{90\cdot 89}{2} = 4005$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$$\{10,20\},\ \{11,19\},\ \{12,18\},\ \{13,17\},\ \{14,16\}.$$

Ich liczba jest równa $|A| = 5$.

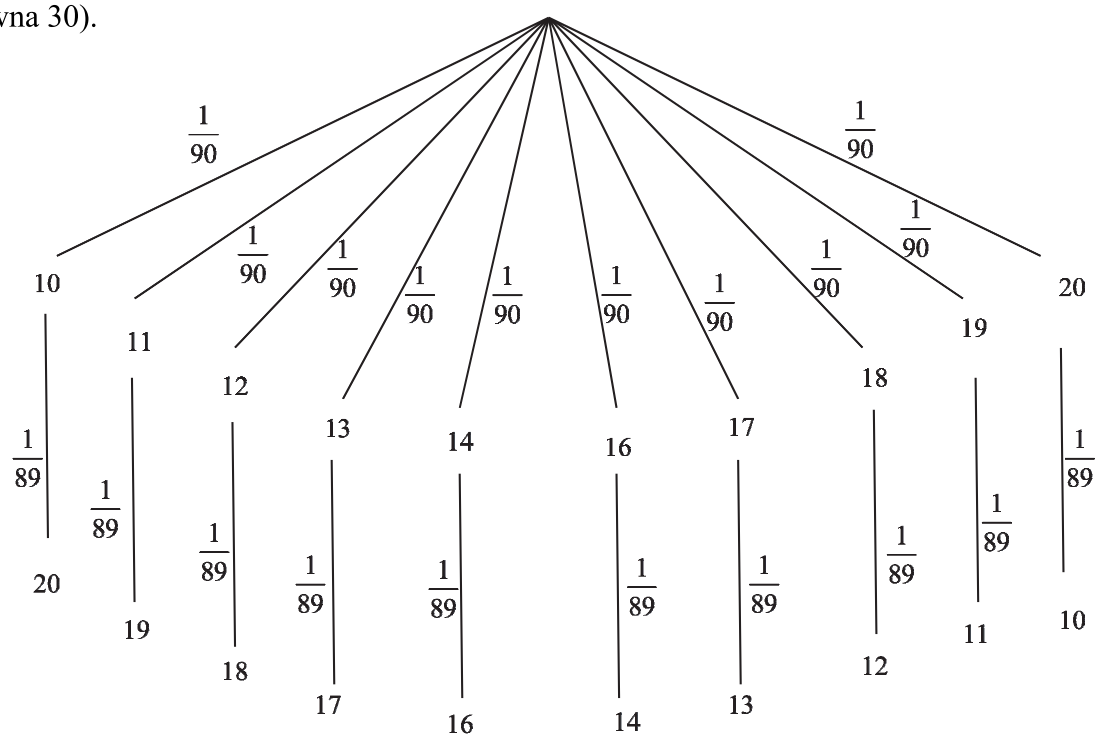
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{45\cdot 89} = \frac{1}{9\cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

III sposób

Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A (polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30).



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=10\cdot\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}=\frac{1}{9\cdot 89}=\frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:

$$(10,20),\ (11,19),\ (12,18),\ (13,17),\ (14,16),\ (16,14),$$

$$(17,13),\ (18,12),\ (19,11),\ (20,10)$$

$$\text{lub } \{10,20\},\ \{11,19\},\ \{12,18\},\ \{13,17\},\ \{14,16\},$$

albo

- zapisze, że $|A|=10$ lub $|A|=5$,

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:

$$(10,20),\ (11,19),\ (12,18),\ (13,17),\ (14,16),\ (16,14),$$

$$(17,13),\ (18,12),\ (19,11),\ (20,10)$$

$$\text{lub } \{10,20\},\ \{11,19\},\ \{12,18\},\ \{13,17\},\ \{14,16\}$$

albo

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz zapisze, że $|A|=10$ lub $|A|=5$,

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=90\cdot 89$ lub $|\Omega|=\binom{90}{2}$, lub $|\Omega|=\frac{90\cdot 89}{2}$, lub $|\Omega|=4005$,

albo

- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....**3 p.**
Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 90 \cdot 89$ oraz zapisze, że $|A| = 10$

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{90}{2}$ lub $|\Omega| = \frac{90 \cdot 89}{2}$, lub $|\Omega| = 4005$ oraz zapisze, że $|A| = 5$,

albo

- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi narysowanego drzewa: $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne ....**4 p.**
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{801}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający błędnie zapisze, że wszystkich liczb dwucyfrowych jest 89 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli w rozwiązaniu występuje sprzeczność modeli probabilistycznych, to zdający może otrzymać, co najwyżej **2 punkty**.
4. Akceptujemy sytuacje, gdy zdający zamiast wypisywania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A zapisze następujące sumy $10+20$, $11+19$, $12+18$, $13+17$, $14+16$, $16+14$, $17+13$, $18+12$, $19+11$, $20+10$ (lub tylko $10+20$, $11+19$, $12+18$, $13+17$, $14+16$).
5. Jeżeli zdający zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90, ale przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, zapisuje sumę $15+15$ i na tym zakończy to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający bez żadnych obliczeń poda tylko wynik, np. $\frac{1}{801}$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.