

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
odpowiedź	A	C	C	B	C	A	B	C	A	D	B	C	D	B	D	C	A	B	A	A	A	C	B	A	A

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^2 - 14x + 24 > 0$.

I sposób rozwiązania

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki tego trójmianu:

$$\Delta = 100, \quad x_1 = \frac{14-10}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{14+10}{2} = 12$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 14 \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = 24$$

i stąd $x_1 = 2, x_2 = 12$

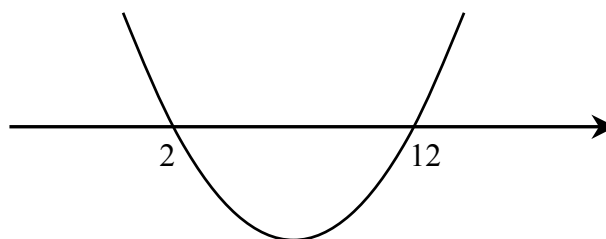
albo

- zapisujemy nierówność w postaci $(x-2)(x-12) > 0$. Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
 - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,
 - korzystając z postaci kanonicznej

$$(x-7)^2 - 25 = (x-7+5) \cdot (x-7-5) = (x-2)(x-12),$$
 - podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi



albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu $x_1 = 2, x_2 = 12$

Podajemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$ lub $x > 12$ lub
 $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$ lub $(-\infty, 2) \cup (12, \infty)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$, $x > 12$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



II sposób rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci

$$(x-7)^2 - 25 > 0, \text{ a następnie}$$

$$(x-7)^2 > 5, \text{ a stąd}$$

$$|x-7| > 5, \text{ więc } x < 2 \text{ lub } x > 12.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy doprowadzi nierówność do postaci $|x-7| > 5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

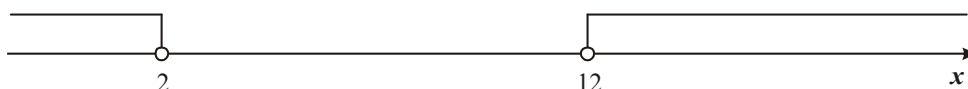
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$ lub $x > 12$
lub $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$ lub $(-\infty, 2) \cup (12, \infty)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$, $x > 12$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Uwagi:

1. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający od razu poda właściwą sumę przedziałów.
2. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x = 2$, $x = 12$ i zapisze np.: $x \in (-\infty, -2) \cup (12, \infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.
3. Przyznajemy **1 punkt** za rozwiązanie, w którym zdający popełni błąd w obliczaniu pierwiastków (np. wstawi do wzoru Δ zamiast $\sqrt{\Delta}$, b zamiast $-b$ lub $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2c}$ zamiast $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, popełni błąd stosując wzory Viète'a) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
4. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który otrzyma niedodatni wyróżnik trójmianu kwadratowego, nawet jeśli konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca (rozwiązuje inne zadanie).
5. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który rozwiązuje nierówność inną niż w treści zadania.
6. W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematyki **akceptujemy zapis**, np. $x \in (-\infty, 2)$ i $x \in (12, \infty)$, ale tylko wówczas gdy zapisowi temu towarzyszy poprawna interpretacja geometryczna.

Zadanie 27. (2 punkty)

Rozwiąż równanie $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

I sposób rozwiązania (grupowanie wyrazów)

Stosując metodę grupowania otrzymujemy:

$$x^2(x-3) + 2(x-3) = 0 \text{ albo } x(x^2+2) - 3(x^2+2) = 0 \text{ stąd}$$

$$(x-3)(x^2+2) = 0, \text{ a stąd}$$

$$x = 3.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można doprowadzić do postaci iloczynowej, np.: $x^2(x-3) + 2(x-3) = 0$ lub $x(x^2+2) - 3(x^2+2) = 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poda rozwiązanie $x = 3$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający otrzyma rozwiązanie $x = 3$ i poda dodatkowo inne rzeczywiste rozwiązanie, to otrzymuje 1 pkt.
2. Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania to otrzymuje 1 pkt.

II sposób rozwiązania (dzielenie)

Sprawdzamy, że $W(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$, więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest $x = 3$.

Dzielimy wielomian przez dwumian $x - 3$ i otrzymujemy $x^2 + 2$. Mamy więc równanie w postaci $(x - 3) \cdot (x^2 + 2) = 0$ a stąd otrzymujemy $x = 3$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $x - 3$, otrzyma iloraz $x^2 + 2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poda rozwiązanie $x = 3$.

Zadanie 28. (2 punkty)

Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 26, a suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 70. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

I sposób rozwiązania

Korzystamy ze wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego i wzoru na sumę pięciu początkowych

wyrazów tego ciągu i zapisujemy układ równań, np.
$$\begin{cases} a_1 + 4r = 26 \\ \frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 70 \end{cases}$$
 Rozwiązujemy układ

równań i obliczamy a_1 :

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 26 \\ 2a_1 + 4r = 28 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4r = 26 - a_1 \\ 2a_1 + 26 - a_1 = 28 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4r = 26 - a_1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

II sposób rozwiązania

Korzystamy ze wzoru na sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie $\frac{a_1 + 26}{2} \cdot 5 = 70$. Następnie obliczamy $a_1 = 2$.

III sposób rozwiązania

Wypisujemy pięć kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego spełniającego podane warunki: 2, 8, 14, 20, 26, zatem $a_1 = 2$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- zapisze układ równań, np. $\begin{cases} a_1 + 4r = 26 \\ \frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 70 \end{cases}$ lub równanie, np. $\frac{a_1 + 26}{2} \cdot 5 = 70$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy
albo
- błędnie obliczy a_1 .

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy $a_1 = 2$.

Uwaga:

1. Jeśli zdający poda tylko $a_1 = 2$ albo $a_1 = 2$ i $r = 6$ to przyznajemy 1 punkt.
2. Zdający otrzymuje 2 punkty, jeżeli wypisze pięć początkowych wyrazów tego ciągu: 2, 8, 14, 20, 26.

Zadanie 29. (2 punkty)

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (4, -2)$ i przechodzącego przez punkt $O = (0, 0)$.

I sposób rozwiązania (z tw. Pitagorasa)

- zapisujemy równanie okręgu w postaci $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$
- zaznaczamy współrzędne środka okręgu w prostokątnym układzie współrzędnych oraz punkt, przez który przechodzi ten okrąg
- obliczamy długość promienia $r = |SO|$:

$$r^2 = 4^2 + 2^2 \quad r = \sqrt{20}$$

- podajemy równanie okręgu w postaci kanonicznej: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20$ lub ogólnej $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- wykorzysta współrzędne środka i zapisze równanie okręgu w postaci $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$ lub $x^2 + y^2 - 8x + 4y + C = 0$ na tym poprzestając albo dalej błędnie interpretuje dane zadania
albo

- wykorzysta fakt, że okrąg przechodzi przez punkt $O = (0, 0)$, błędnie wyznaczy długość promienia okręgu np. $r = \sqrt{12}$ i konsekwentnie do tego zapisze równanie $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 12$

albo

- błędnie przyjmie, że środkiem okręgu jest punkt $S_1 = (-2, 4)$ i konsekwentnie do tego zapisze równanie $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$

albo

- wyznaczy równanie okręgu popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

- zapisze równanie okręgu w postaci kanonicznej $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$ lub ogólnej $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.

II sposób rozwiązania (odległość między dwoma punktami)

- zapisujemy równanie okręgu w postaci np.: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$
- obliczamy odległość punktu $O = (0, 0)$ od środka okręgu:

$$|OS| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20}$$

- podajemy równanie okręgu w postaci kanonicznej: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$ lub ogólnej $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- wykorzysta współrzędne środka i zapisze równanie okręgu w postaci $(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$ lub $x^2 + y^2 - 8x + 4y + C = 0$ na tym poprzestając albo dalej błędnie interpretuje dane z zadania (np. zamiast r^2 może być dowolna liczba dodatnia)

albo

- obliczy długość promienia okręgu korzystając z odległości dwóch punktów np. $|OS| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ i nie poda równania okręgu lub poda je błędnie np. $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 20$

albo

- błędnie przyjmie, że środkiem okręgu jest punkt $S_1 = (-2, 4)$ i konsekwentnie do tego zapisze równanie $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$

albo

- wyznaczy równanie okręgu popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

- zapisze równanie okręgu w postaci kanonicznej $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$ lub ogólnej $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.

Uwaga:

Jeśli zdający zapisze od razu wzór $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$ to przyznajemy 2 punkty.

Zadanie 30. (2 punkty)

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (3, 8)$, $B = (1, 2)$, $C = (6, 7)$ jest prostokątny.

I sposób rozwiązania (z tw. Pitagorasa)

- Obliczamy długości boków trójkąta $|AB| = 2\sqrt{10}$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = 5\sqrt{2}$
- Obliczamy sumę kwadratów dwóch boków trójkąta, np.
 $|AB|^2 + |AC|^2 = 40 + 10 = 50 = |BC|^2$

Możemy w takim przypadku wywnioskować, że dane wierzchołki A , B , C są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- obliczy długości boków trójkąta ABC : $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
albo
- obliczy długość jednego boku z błędem, a pozostałe poprawnie i konsekwentnie wyciągnie wniosek

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.

- obliczy długości boków trójkąta ABC : $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,
skorzysta z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa i stwierdzi na tej podstawie, że trójkąt jest prostokątny.

II sposób rozwiązania (współczynniki kierunkowe prostych)

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe prostych AB , AC , BC

$$a_{AB} = \frac{2-8}{1-3} = 3, \quad a_{AC} = \frac{7-8}{6-3} = -\frac{1}{3}, \quad a_{BC} = \frac{7-2}{6-1} = 1$$

Iloczyn współczynników kierunkowych prostych AB i BC jest równy -1 , więc są to proste prostopadłe, a tym samym trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- obliczy współczynniki kierunkowe prostych AB i AC i na tym poprzestanie

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy

- przeprowadzi pełne rozumowanie, np. wyznaczy iloczyn współczynników kierunkowych prostych AB i BC i stwierdzi, że proste są prostopadłe, więc trójkąt jest prostokątny.

III sposób rozwiązania (iloczyn skalarny)

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AB} = [-2, -6]$, $\overrightarrow{AC} = [3, -1]$ i $\overrightarrow{BC} = [5, 5]$.

Obliczamy iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) = 0$.

Jeżeli iloczyn skalarny wektorów równa się zero to wektory są prostopadłe, a tym samym trójkąt ABC jest prostokątny.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- obliczy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ i na tym poprzestanie.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy

- przeprowadzi pełne rozumowanie wykaże za pomocą wektorów, że trójkąt jest prostokątny.

IV sposób rozwiązania (okrąg opisany na trójkącie prostokątnym)

Obliczamy długości boków trójkąta $|AB| = 2\sqrt{10}$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = 5\sqrt{2}$.

Jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny to środek najdłuższego boku jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Najdłuższym bokiem trójkąta ABC jest $|BC|$, więc wyznaczamy współrzędne środka odcinka

$$BC: S = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

Obliczamy odległość punktu S od wierzchołków A, B, C : $|BS| = |SC| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$$|AS| = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - 8\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Odległość środka odcinka BC jest taka sama od wszystkich wierzchołków trójkąta ABC , więc trójkąt ten jest prostokątny.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- obliczy długości boków trójkąta ABC : $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

albo

- obliczy długość jednego boku z błędem, a pozostałe poprawnie i konsekwentnie do tego wyciągnie poprawny wniosek

albo

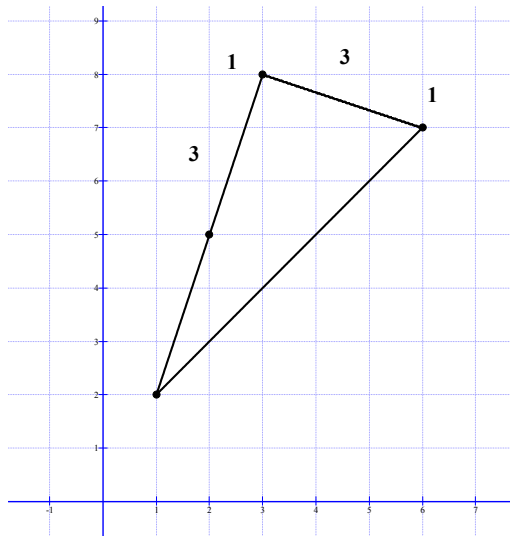
- wyznaczy współrzędne $S = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ środka odcinka BC i obliczy długość odcinka AS .

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie

- wykaże, że BC jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC i stwierdzi, że ten trójkąt jest prostokątny

V sposób rozwiązania (graficzny)

Zaznaczamy wierzchołki trójkąta $A = (3, 8)$, $B = (1, 2)$, $C = (6, 7)$



Wykazujemy, że trójkąt jest prostokątny na podstawie dokładnego rysunku w układzie współrzędnych.

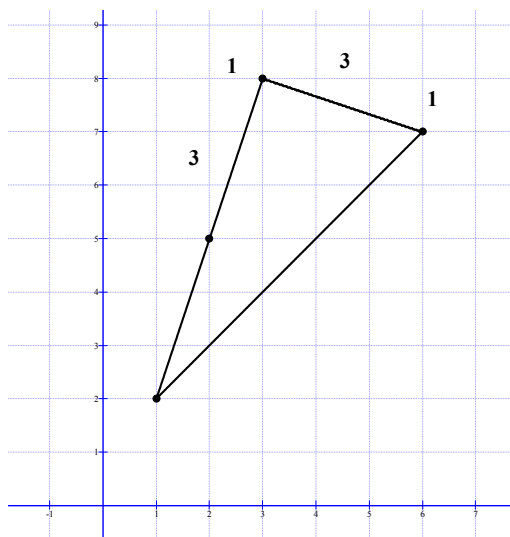
Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- na podstawie punktów kratowych poda długości boków trójkąta ABC :
 $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.

- wykaże, że trójkąt jest prostokątny na podstawie dokładnego rysunku w układzie współrzędnych, np.



Uwaga:

Jeżeli zdający na rysunku jak wyżej wyróżni oprócz wierzchołków tylko punkt kratowy o współrzędnych $(2, 5)$ i na tym poprzestanie, to otrzymuje 1 punkt.

Zadanie 31. (2 punkty)

Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$, to $a = b$ lub $a + b = 1$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równość zapisaną z treści zadania

$$\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2} \quad | ()^2$$

$$a^2 + b = a + b^2$$

$$a^2 - b^2 + b - a = 0$$

$$(a - b)(a + b) - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a - b = 0 \quad \text{lub} \quad a + b - 1 = 0$$

$$a = b \quad \text{lub} \quad a + b = 1$$

co należało wykazać.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy poprawnie przekształci równość $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$ pozbywając się pierwiastków i w otrzymanej równości zastosuje wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, pisząc np.: $(a - b)(a + b) - a + b = 0$ i tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie zakończone wnioskiem, że $a = b$ lub $a + b = 1$.

Uwaga:

Jeżeli zdający podstawí konkretne wartości w miejsce a i b , to przyznajemy **0 punktów**.

Zadanie 32. (4 punkty)

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 6 i iloczyn tych liczb jest nieparzysty.

I sposób rozwiązania (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (x, y) liczb naturalnych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Oznaczając przez A zdarzenie - suma liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 6 i iloczyn tych liczb jest nieparzysty, otrzymujemy

$$A = \{(5, 3), (3, 5), (5, 5)\}, |A| = 3 \text{ i } P(A) = \frac{1}{12}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ albo wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{(5, 3), (3, 5), (5, 5)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $A = \{(5, 3), (3, 5), (5, 5)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $|A| = 3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

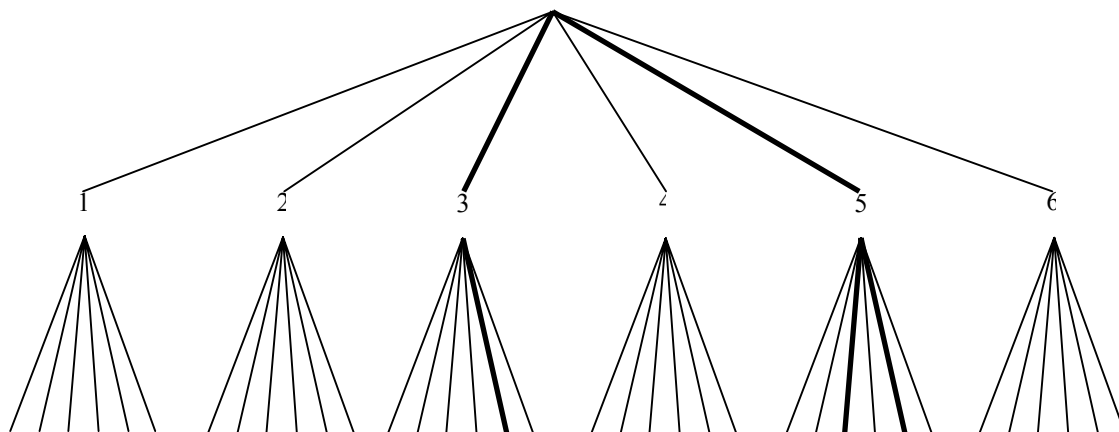
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{1}{12}$

Uwaga

Jeśli zdający zapisze, że $P(A) > 1$, to otrzymuje 0 pkt.

II sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo dla danego doświadczenia losowego. Prawdopodobieństwo na każdym jego odcinku jest równe $\frac{1}{6}$. Pogrubione gałęzie ilustrują zdarzenie opisane w treści zadania.



Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Uwaga:

Możemy narysować fragment drzewa - pogrubione gałęzie na rysunku.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt
Zdający narysuje drzewo i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt
Zdający narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Uwagi:

- Oceniamy rozwiązanie na 0 punktów, gdy w dalszej części rozwiązania zdający dodaje prawdopodobieństwa wzdłuż gałęzi zamiast mnożyć albo mnoży otrzymane iloczyny zamiast dodawać.
- Dopuszcza się błąd w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa (traktujemy jako błąd nieuwagi).
- Jeżeli zdający opisał prawdopodobieństwa tylko na istotnych gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania”.
- Jeżeli zdający narysował „inteligentne drzewo” i opisał prawdopodobieństwa na jego gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania”.
- Jeżeli rozwiązujący popełni błąd rachunkowy lub nieuwagi i na tym zakończy, to otrzymuje 2 punkty.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt
• Zdający wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw tylko na istotnych gałęziach).

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt
Obliczenie prawdopodobieństwa: $\frac{1}{12}$

III sposób rozwiązania (tabela)

Rysujemy tabelę o wymiarach 6x6, w tabeli jest 36 pól. Zaznaczamy pola sprzyjające zdarzeniu opisanemu w treści zadania i obliczamy prawdopodobieństwo.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Tak jak w I sposobie.

Zadanie 33. (4 punkty)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD , BE i CF . Oblicz pole trójkąta ABF wiedząc, że $|AB|=10$ i $|CF|=11$. Narysuj ten graniastosłup i zaznacz na nim trójkąt ABF .

I sposób rozwiązania

Ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego mamy $|SC|=5\sqrt{3}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SCF

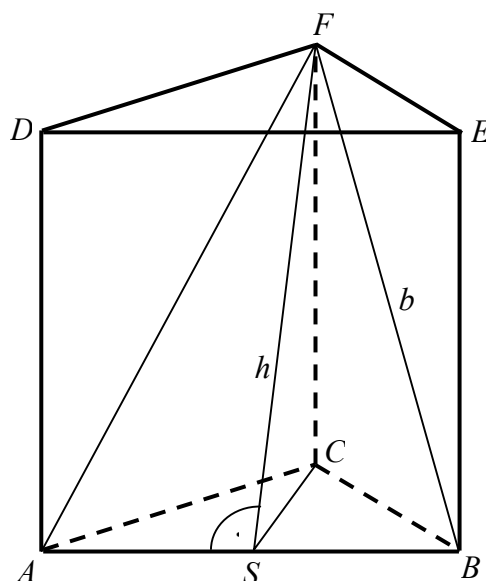
dostajemy $h = \sqrt{11^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{196} = 14$, więc

pole trójkąta ABF jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14 = 70.$$

Uwaga 1.

Zamiast obliczać $|SC|=5\sqrt{3}$ możemy również obliczyć z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BEF długość przeciwprostokątnej BF tego trójkąta ($b = \sqrt{11^2 + 10^2}$, $b = \sqrt{221} \approx 14,87$), a dalej z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SBF długość odcinka FS , czyli h ($h = \sqrt{221 - 25} = \sqrt{196} = 14$).



Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt
Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta ABF .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- obliczenie wysokości SC trójkąta równobocznego ABC : $|SC|=5\sqrt{3}$
albo
- obliczenie długości przekątnej ściany bocznej $b=|BF|$: $b=\sqrt{221}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie $h=|FS|$ wysokości trójkąta ABF : $h=14$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki 2 pkt

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Obliczenie pola trójkąta ABF : $P=70$.

II sposób rozwiązania

- 1) Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta ABF .
- 2) Obliczenie $b = |AF|$ (długości przekątnej ściany bocznej) z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACF : $b = \sqrt{11^2 + 10^2}$ stąd $b = \sqrt{221} \approx 14,87$.
- 3) Obliczenie p połowy obwodu trójkąta ABF : $p = \frac{10 + 2\sqrt{221}}{2} = 5 + \sqrt{221}$.
- 4) Obliczenie pola trójkąta ABF np. ze wzoru Herona:
$$P = \sqrt{(\sqrt{221} + 5) \cdot (\sqrt{221} + 5 - \sqrt{221}) \cdot (\sqrt{221} + 5 - 10)} = \sqrt{25(\sqrt{221} - 5)(\sqrt{221} + 5)}:$$
$$P = 70.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta ABF .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej $b = |AF|$: $b = \sqrt{221}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie p połowy obwodu trójkąta ABF : $p = \sqrt{221} + 5$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki 2 pkt

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Obliczenie pola trójkąta ABF : $P = 70$.

Uwaga:

Jeżeli zdający zastosuje poprawnie wzór Herona, doprowadzając rozwiązanie do końca, ale w trakcie obliczania pola popełni błąd rachunkowy wcześniej bezbłędnie obliczając połowę obwodu trójkąta, to otrzymuje 3 punkty za całe rozwiązanie.

III sposób rozwiązania

- 1) Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta ABF .
- 2) Obliczenie $b = |AF|$ (długości przekątnej ściany bocznej) z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACF : $b = \sqrt{11^2 + 10^2}$, stąd $b = \sqrt{221} \approx 14,87$.
- 3) Obliczenie cosinusa kąta AFB : $|AB|^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos|\sphericalangle AFB|$,
$$100 = 2 \cdot 221 - 2 \cdot 221 \cos|\sphericalangle AFB| \text{ stąd } \cos|\sphericalangle AFB| = \frac{171}{221}$$
- 4) Obliczenie sinusa kąta AFB $\sin|\sphericalangle AFB| = \sqrt{1 - \left(\frac{171}{221}\right)^2}$: $\sin|\sphericalangle AFB| = \frac{140}{221}$.
- 5) Obliczenie pola trójkąta ABF ze wzoru $P = \frac{b^2 \sin|\sphericalangle AFB|}{2}$: $P = 70$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta ABF .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej $b = |AF|$: $b = \sqrt{221}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt

Obliczenie sinusa kąta AFB : $\sin|\sphericalangle AFB| = \frac{140}{221}$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki..... 2 pkt

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Obliczenie pola trójkąta ABF : $P = 70$.

Zadanie 34. (5 punktów)

Kolarz przejechał trasę długości 60 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością większą o 1 km/h, to przejechałby tę trasę w czasie o 6 minut krótszym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Rozwiązanie

Oznaczamy przez v średnią prędkość kolarza, a przez t czas pokonania całej trasy w godzinach.

Z warunków zadania zapisujemy

$$60 = (v+1)(t-0,1) \quad \text{lub} \quad v+1 = \frac{60}{t-0,1} \quad \text{lub} \quad t-0,1 = \frac{60}{v+1}$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ 60 = (v+1)(t-0,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{60}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 = (v+1)\left(\frac{60}{v} - 0,1\right) \end{cases}$$

$$60 = \frac{60(v+1)}{v} - 0,1(v+1) \quad | \cdot v$$

$$60v = 60v + 60 - 0,1v^2 - 0,1v$$

$$0,1v^2 + 0,1v - 60 = 0 \quad | \cdot 10$$

$$v^2 + v - 600 = 0$$

$$\Delta = 2401$$

$$v_1 = 24 \quad \text{lub} \quad v_2 = -25$$

v_2 nie spełnia warunków zadania ($v > 0$)

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ v+1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{60}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{60}{t} + 1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases}$$

$$(60+t)(t-0,1) = 60t$$

$$60t + t^2 - 0,1t - 6 = 60t$$

$$t^2 - 0,1t - 6 = 0$$

$$\Delta = 24,01$$

$$t_1 = 2,5 \quad \text{lub} \quad t_2 = -2,4$$

t_2 nie spełnia

warunków zadania

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ t-0,1 = \frac{60}{v+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{60}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t-0,1 = \frac{60}{\frac{60}{t} + 1} \end{cases}$$

$$(60+t)(t-0,1) = 60t$$

i dalej jak w poprzednim rozwiązaniu.

zadania ($v > 0$)

($t > 0$)

Obliczamy

$$v = \frac{60}{2,5} = 24$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzające niewielkie, ale konieczne na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zapisać równanie w sytuacji domniemanej (t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach, a v średnią prędkość kolarza w kilometrach na godzinę)

- $60 = (v+1)(t-0,1)$

albo

- $v+1 = \frac{60}{t-0,1}$

albo

- $t-0,1 = \frac{60}{v+1}$

albo

$$v \cdot t = 60$$

Uwaga

Przyznajemy 0 pkt, jeżeli zdający napisze, że $60 = (v+1)(t+0,1)$ lub równoważne (tzn. wg zdającego kolarz jadący szybciej jedzie dłużej).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisać układ równań z niewiadomymi v i t - odpowiednio z prędkością i czasem

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ 60 = (v+1)(t-0,1) \end{cases} \text{ albo } \begin{cases} 60 = v \cdot t \\ v+1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases} \text{ albo } \begin{cases} 60 = v \cdot t \\ t-0,1 = \frac{60}{v+1} \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Sprowadzenie do równania wymiernego z jedną niewiadomą v lub t , np.:

$$60 = (v+1) \left(\frac{60}{v} - 0,1 \right) \quad \text{lub} \quad \frac{60}{t} + 1 = \frac{60}{t-0,1} \quad \text{lub} \quad t-0,1 = \frac{60}{\frac{60}{t} + 1}.$$

Uwaga:

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki 2 pkt

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- rozwiązanie równania $60 = (v+1) \left(\frac{60}{v} - 0,1 \right)$ z błędem rachunkowym

- rozwiązanie równania $\frac{60}{t} + 1 = \frac{60}{t - 0,1}$ lub $t - 0,1 = \frac{60}{\frac{60}{t} + 1}$ bezbłędnie: $t = -2,4$ h lub $t = 2,5$ h i nieobliczenie prędkości
- rozwiązanie równania z niewiadomą t z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie prędkości

Uwaga

Zdający otrzymuje również 4 pkt za doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego:

$$v^2 + v - 600 = 0 \quad \text{lub} \quad t^2 - 0,1t - 6 = 0$$

lub za otrzymanie tego równania kwadratowego bezpośrednio z układu równań.

Rozwiązanie bezbłędne 5 pkt

Obliczenie średniej prędkości, z jaką jechał kolarz: $v = 24$ km/h.