

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

**FORMUŁA OD 2015  
„NOWA MATURA”  
i  
FORMUŁA DO 2014  
„STARA MATURA”**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**SIERPIEŃ 2018**

## **Egzaminatorze!**

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	A	D	B	B	C	C	D	D	A	D	A	B	C	A	B	C	D	A	D	D	B	C	C

## Schemat oceniania zadań otwartych

### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność  $x^2 + 6x - 16 < 0$ .

#### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $x^2 + 6x - 16$ .

**Drugi etap** to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 + 6x - 16$ 
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:  
 $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 100$  i stąd  $x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8$  oraz  $x_2 = \frac{-6+10}{2} = 2$
  - albo
  - stosujemy wzory Viète'a:  
 $x_1 \cdot x_2 = -16$  oraz  $x_1 + x_2 = -6$ , stąd  $x_1 = -8$  oraz  $x_2 = 2$ .

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-8, 2)$  lub  $x \in (-8, 2)$ .

#### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = -8$  i  $x_2 = 2$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = x^2 + 6x - 16$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale obliczy dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-8, 2)$  lub  $x \in (-8, 2)$ , lub  $x > -8 \wedge x < 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



### Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik  $\Delta$  jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci:  $x < 2$  lub  $x > -8$ ,  $x < 2$  oraz  $x > -8$ , itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = -8$ ,  $x_2 = 2$  i błędnie zapisze odpowiedź, np.  $x \in (8, 2)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do rzeczywistego zbioru rozwiązań lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $x \in (2, -8)$  lub  $(2, -8)$ , to przyznajemy **2 punkty**.

### Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie  $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$ .

#### Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników  $x^3 + 27$  oraz  $x^2 - 16$ . Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli  $x^3 + 27 = 0$  lub  $x^2 - 16 = 0$ .

Rozwiązaniem równania  $x^3 + 27 = 0$  jest  $x = \sqrt[3]{-27} = -3$ .

Równanie  $x^2 - 16 = 0$  doprowadzamy do postaci iloczynowej  $(x - 4) \cdot (x + 4) = 0$ .

Przynajmniej jeden z czynników  $x - 4$  lub  $x + 4$  jest równy 0, czyli  $x = 4$  lub  $x = -4$ .

Wszystkie rozwiązania równania  $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$ ,

to  $x = -3$  lub  $x = 4$ , lub  $x = -4$ .

#### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... **1 p.**  
gdy:

- zapisze dwa równania  $x^3 + 27 = 0$  i  $x^2 - 16 = 0$   
albo

- wyznaczy poprawnie (lub poda) rozwiązania jednego z równań:  $x^3 + 27 = 0$  lub  $x^2 - 16 = 0$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

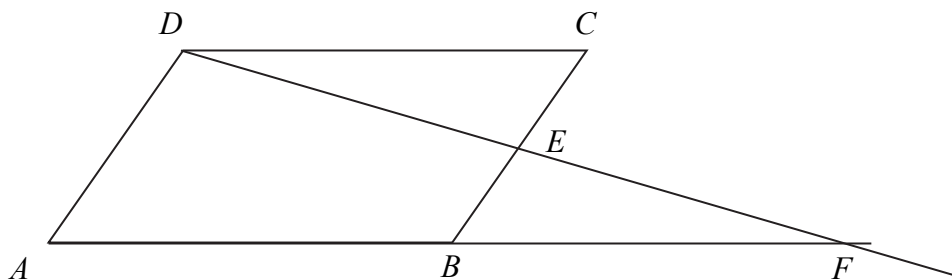
**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania:  $x = -3$  lub  $x = 4$ , lub  $x = -4$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający uzyska trafne rozwiązania równania, ale w wyniku błędnej metody, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie uzyska 1 punktu za zapisanie dwóch równań  $x^3 + 27 = 0$  i  $x^2 - 16 = 0$ .
3. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pierwiastki wielomianu  $(x^3 + 27)(x^2 - 16)$  i poda niewłaściwą odpowiedź, np.  $x \in \mathbb{R} - \{-4, -3, 4\}$ , to otrzymuje **1 punkt**.

### Zadanie 28. (0–2)

W równoległoboku  $ABCD$  punkt  $E$  jest środkiem boku  $BC$ . Z wierzchołka  $D$  poprowadzono prostą przecinającą bok  $BC$  w punkcie  $E$ . Proste  $AB$  i  $DE$  przecinają się w punkcie  $F$  (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AF$ .



### Przykładowe rozwiązanie

I sposób (podobieństwo)

Rozpatrujemy trójkąty  $AFD$  i  $BFE$ .

Kąty  $DAF$  i  $EBF$  są odpowiadające i odcinki  $AD$  i  $BC$  są równoległe, więc  $|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle EBF|$ .

Tak samo wnioskujemy, że  $|\sphericalangle ADF| = |\sphericalangle BEF|$ . Ponadto kąt przy wierzchołku  $F$  jest kątem wspólnym w obu trójkątach, więc z cechy *kkk* podobieństwa trójkątów wnioskujemy, że trójkąty  $AFD$  i  $BFE$  są podobne.

Stąd wynika proporcja

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|},$$

ale  $|BE| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|AD|$ , gdyż punkt  $E$  jest środkiem boku  $BC$ .

Zatem

$$\frac{|AD|}{\frac{1}{2}|AD|} = \frac{|AF|}{|BF|}, \text{ czyli } |AF| = 2|BF|,$$

co należało wykazać.

**II sposób (przystawanie)**

Rozpatrujemy trójkąty  $BFE$  oraz  $CDE$ .

1. Kąty  $BEF$  i  $CED$  są wierzchołkowe, więc  $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle CED|$ .
2. Kąty  $FBE$  i  $DCE$  są naprzemianległe i proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe, więc  $|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle DCE|$
3. Punkt  $E$  jest środkiem boku  $BC$ , więc  $|BE| = |EC|$ .

Stąd, na mocy cechy *kbk* przystawania trójkątów wnioskujemy, że trójkąty  $BFE$  i  $CDE$  są przystające. Zatem  $|BF| = |CD|$ .

Ponieważ czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem, więc  $|AB| = |CD|$ . Z ostatnich dwóch równości wynika, że  $|AB| = |BF|$ , co oznacza, że punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AF$ .

To należało wykazać.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy

- zapisze lub wykorzysta przystawanie trójkątów  $BFE$  oraz  $CDE$

albo

- zauważy podobieństwo trójkątów  $AFD$  i  $BFE$ , zapisze proporcję, wynikającą z tego podobieństwa, np.  $\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 29. (0–2)**

Wykaż, że jeżeli  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to  $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ .

**Przykładowe rozwiązanie**

Przekształcamy równoważnie wyrażenie  $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$

i otrzymujemy

$$\begin{aligned}1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 &\geq 4, \\ \frac{a^2 + b^2}{ab} &\geq 2, \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab, \\ (a-b)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta kończy dowód.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy poprawnie przekształci nierówność do postaci, w której liczby  $a$  i  $b$  występują jedynie w wyrażeniach:  $a^2$ ,  $b^2$  i  $ab$ , np.:  $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$  lub  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności  $(a-b)^2 \geq 0$ , to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości  $a$  i  $b$ , to otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeżeli zdający w wyniku poprawnych przekształceń równoważnych otrzyma nierówność  $(a+b)^2 \geq 4ab$ , to otrzymuje **1 punkt**.
7. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  i dopisze komentarz o średnich, uzasadniający jej prawdziwość dla dowolnych liczb dodatnich  $a$ ,  $b$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 30. (0–2)**

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , określonego dla  $n \geq 1$ , jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

**Przykładowe rozwiązanie**

Korzystamy ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $a_9$ :

$$a_9 = a_1 + (9-1) \cdot r.$$

Korzystamy ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $S_8$ :

$$S_8 = \frac{2a_1 + (8-1) \cdot r}{2} \cdot 8.$$

Otrzymujemy układ równań

$$34 = a_1 + 8r \text{ i } 110 = 8a_1 + 28r.$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -2, r = 4,5.$$

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$  wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\text{np.: } 34 = a_1 + 8r \text{ i } 110 = \frac{2a_1 + 7r}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu:  $a_1 = -2$  i obliczy różnicę ciągu:  $r = 4,5$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 8 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że  $a_1 = -2$  i  $r = 4,5$ , to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że  $a_1 = -2$  i  $r = 4,5$ , ale nie zapisze wszystkich 8 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko  $a_1 = -2$  i  $r = 4,5$ , to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający dodaje do sumy ośmiu początkowych wyrazów wyraz dziewiąty i zapisuje właściwe równanie z niewiadomą  $a_1$ , to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**.

**Zadanie 31. (0–2)**

Punkty  $A = (2, 4)$ ,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (4, -2)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ . Punkt  $D$  jest środkiem boku  $AC$  tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej  $BD$ .

**Przykładowe rozwiązania**

Punkt  $D$  jest środkiem odcinka  $AC$ , więc ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$D = \left( \frac{2+4}{2}, \frac{4+(-2)}{2} \right) = (3, 1).$$

Pozostaje wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty  $B = (0, 0)$  i  $D = (3, 1)$ .

I sposób

Szukane równanie ma postać  $y = ax + b$ . Ponieważ punkty  $B$  i  $D$  leżą na tej prostej, więc możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot 3 + b = 1 \\ a \cdot 0 + b = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy  $b = 0$ , a odejmując stronami otrzymujemy  $3a = 1$ , czyli  $a = \frac{1}{3}$ .

II sposób

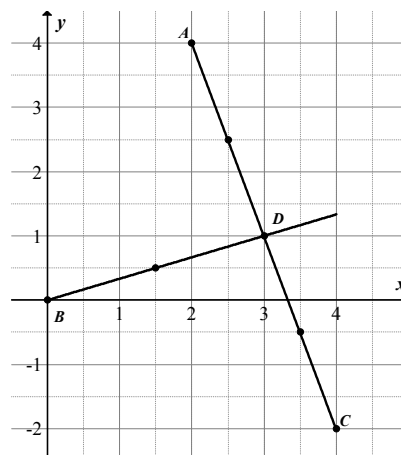
Podstawmy współrzędne punktów  $D = (3, 1)$  oraz  $B = (0, 0)$  do równania prostej, przechodzącej przez dane dwa punkty:

$$(y - 1)(0 - 3) - (0 - 1)(x - 3) = 0.$$

Stąd  $-3(y - 1) + x - 3 = 0$ , czyli  $-3y + 3 + x - 3 = 0$ . Zatem  $y = \frac{1}{3}x$ .

III sposób

Możemy zaznaczyć w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta i korzystając z punktów kratowych ustalić zależność między prostą  $AC$  i prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez środek odcinka  $AC$ , np. tak, jak na rysunku.



Zauważamy wówczas, że szukana prosta ma równanie  $y = \frac{1}{3}x$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy

- wyznaczy lub poda współrzędne środka  $D$  odcinka  $AC$ :  $D = (3, 1)$

albo

- zaznaczy w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta  $ABC$  i zaznaczy na rysunku prostą  $BD$  oraz wyznaczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $-3$ .

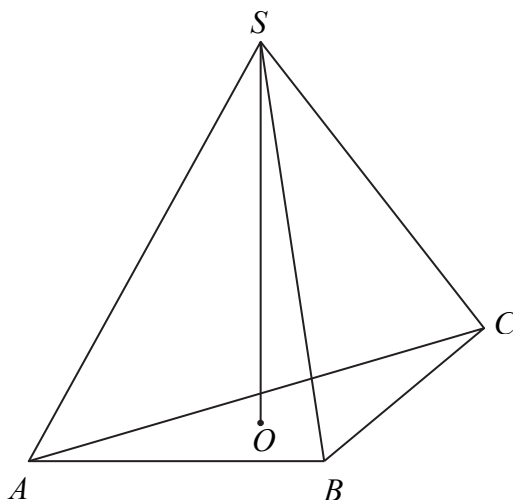
**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy wyznaczy równanie prostej  $BD$ :  $y = \frac{1}{3}x$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AC$  i przechodzącej przez punkt  $B$  oraz zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AC$  i przechodzącej przez punkt  $B$ , ale nie zapisze (nie zaznaczy na rysunku), że trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający wyznacza równanie prostej prostopadłej do prostej  $AC$  i przechodzącej przez punkt  $B$  i popełni przy tym błąd lub nie doprowadzi rozwiązania do końca, ale zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 32. (0–5)**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym  $ABCS$  krawędź podstawy ma długość  $a$ . Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



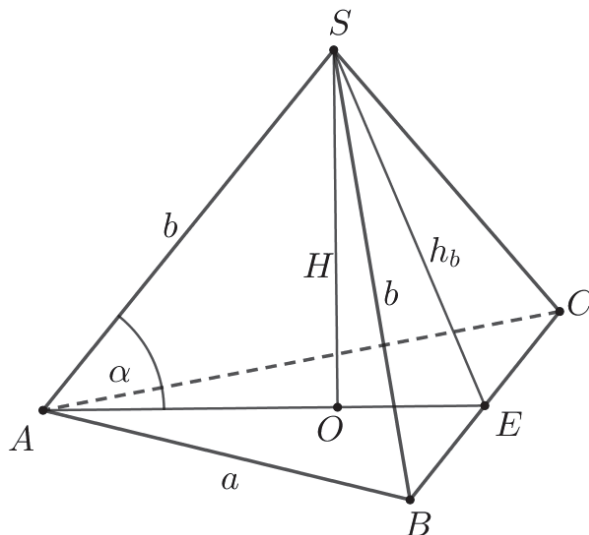
**Przykładowe rozwiązanie**

Wprowadzamy oznaczenia:

$h_b$  – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

$\alpha$  – kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy,

$E$  – środek krawędzi  $BC$ .



Z podanej zależności pól  $2 \cdot P_p = P_b$  otrzymujemy równanie

$$2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b,$$

skąd otrzymujemy

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trójkąt  $ABC$  jest równoboczny, spodek  $O$  wysokości ostrosłupa jest środkiem ciężkości tego trójkąta, więc  $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  oraz  $|AO| = \frac{2}{3}|AE|$ . Stąd

$$|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym  $BES$  i otrzymujemy

$$|SB| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Ponieważ w ostrosłupie prawidłowym krawędzie boczne mają równe długości, więc

$$|AS| = |BS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Z definicji cosinusa w trójkącie prostokątnym  $AOS$  otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|}. \quad \cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

#### Uwaga

Zamiast wyznaczać długość krawędzi bocznej może wyznaczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $OES$  wysokość  $SO$  ostrosłupa:

$$|SO| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Następnie z trójkąta prostokątnego  $ASO$  możemy obliczyć tangens kąta  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|SO|}{|AO|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych możemy obliczyć cosinus kąta  $\alpha$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$ . Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\frac{7}{4} \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{4}{7}.$$

Stąd  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ , gdyż kąt  $\alpha$  jest ostry.

#### **Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający:

- zaznaczy na rysunku kąt  $\alpha$  lub zapisze  $\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|}$

albo

- wyznaczy długość odcinka  $AO$ :  $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,

albo

- wyznaczy długość odcinka  $EO$ :  $|EO| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ,

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi  $a$  i  $h_b$  wynikające z zależności między polem podstawy i polem powierzchni bocznej ostrosłupa:  $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b$

i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa opuszczoną na krawędź podstawy:

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- wyznaczy długość krawędzi bocznej  $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$  i nie wyznaczy długości odcinka  $AO$

albo

- wyznaczy długość odcinka  $AO$  i wysokość ostrosłupa:  $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $|SO| = \frac{a}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający:

- wyznaczy  $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$  i  $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- obliczy  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ,

albo

- obliczy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy wartość  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popęlnia błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole trójkąta równobocznego, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popęlnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popęlnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popęlnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popęlnia błąd merytoryczny, przyjmując, że punkt  $O$  jest środkiem odcinka  $AE$  lub przyjmie, że  $|AO| = \frac{1}{3}|AE|$ , to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popęlnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający popęlnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując  $P_p = 2P_b$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując  $2P_p = P_{sb}$  lub  $P_p = 2P_{sb}$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
8. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązuje zadanie, oblicza  $\operatorname{tg}\alpha$  lub  $\sin\alpha$ , a następnie podaje przybliżoną wartość cosinusa z tablic, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów.

**Zadanie 33. (0–4)**

Ze zbioru  $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  losujemy liczbę  $a$ , natomiast ze zbioru  $B = \{-1, 0, 1, 2\}$  losujemy liczbę  $b$ . Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej  $f(x) = ax + b$ . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja  $f$  jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

**Przykładowe rozwiązanie**

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para  $(a, b)$  liczb, gdzie  $a \in A$  oraz  $b \in B$ . Liczba  $|\Omega|$  wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 6 \cdot 4 = 24.$$

Niech  $Z$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymana funkcja  $f$  jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy współczynnik kierunkowy  $a$  jest dodatni, więc  $a \in \{1, 2, 3\}$ . Rosnąca funkcja liniowa ma dodatnie miejsce zerowe tylko wówczas, gdy jej wykres przecina oś  $Oy$  w punkcie o ujemnej rzędnej. Zatem współczynnik  $b$  musi być równy  $-1$ .

Zbiór  $Z$  ma więc postać

$$Z = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1)\}.$$

Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $Z$  jest równa

$$|Z| = 3.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $Z$  jest równe:

$$P(Z) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 6 \cdot 4 = 24$  lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

albo

- zapisze, że funkcja liniowa  $f$  jest rosnąca tylko dla  $a \in \{1, 2, 3\}$ ,

albo

- zapisze, że funkcja liniowa  $f$ , jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe dla  $b = -1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 6 \cdot 4$  lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne oraz zapisze, że funkcja liniowa  $f$  jest rosnąca tylko dla  $a \in \{1, 2, 3\}$

albo

- zapisze, że funkcja liniowa  $f$  jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe dla  $a \in \{1, 2, 3\}$  i  $b = -1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający obliczy lub poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych  $|\Omega| = 6 \cdot 4$  oraz

- wyznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $Z$ :  
( $Z = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1)\}$ )

albo

- zapisze, że  $a \in \{1, 2, 3\}$ ,  $b = -1$  oraz  $|Z| = 3$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy szukane prawdopodobieństwo:  $\frac{1}{8}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poda, że  $|Z| = 3$  i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $Z$  i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, ale zapisze, że  $a \in \{1, 2, 3\}$  (albo tylko  $b = -1$ ), to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda, że  $|Z| = 3$  i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $Z$  i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, nie zapisze, że  $a \in \{1, 2, 3\}$  oraz nie zapisze, że  $b = -1$ , to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający wypisze 3 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $Z$  i przyjmie, że takimi zdarzeniami są też inne pary postaci  $(a, b)$ , gdzie  $a \in \{1, 2, 3\}$ , to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile przyjęcie tych niepoprawnych zdarzeń elementarnych jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsc zerowych utworzonych funkcji.
5. Jeżeli zdający wypisze 2 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $Z$  i trzecie poprawne potraktuje jako zdarzenie niesprzyjające zdarzeniu  $Z$ , to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile odrzucenie tego poprawnego zdarzenia elementarnego jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsca zerowego utworzonej funkcji.
6. Jeżeli zdający zamiast rozważać  $a > 0$  rozważa  $a < 0$ , to jego rozwiązanie może być ocenione tak jak w niżej wymienionych przypadkach.  
**Przypadek 6a.** Jeśli zdający, przy rozważanym  $a < 0$ , rozważa  $b < 0$ , rysuje wykres rosnącej funkcji liniowej (lub w inny sposób sygnalizuje, że rozważa funkcję rosnącą) i poprawnie oblicza  $|\Omega|$ , to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.  
**Przypadek 6b.** Jeśli zdający, przy rozważanym  $a < 0$ , rozważa funkcję liniową malejącą i konsekwentnie  $b > 0$ , a ponadto poprawnie oblicza  $|\Omega|$ , to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
7. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie metodą drzewkową to może otrzymać:  
**4 punkty** – za rozwiązanie w pełni poprawne;  
**3 punkty** – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

$a = 1, 2, 3$  i że  $a$  może być wylosowane z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ ,  $b = -1$  i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$ ;

**2 punkty** – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a > 0$  i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ ,  $b < 0$  i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$

albo

- $a = 1, 2, 3$  i  $b = -1$ ;

**1 punkt** – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a = 1, 2, 3$

albo

- $a > 0$  i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ .

8. Jeżeli zdający poprawnie obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych (lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne) i zapisze, że funkcja liniowa  $f$ , jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe gdy  $b = -1$ , to może otrzymać **2 punkty**.

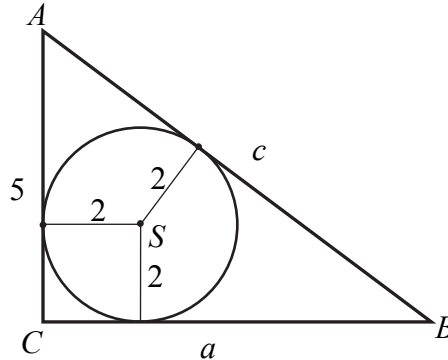
**Zadanie 34. (0–4)**

W trójkącie prostokątnym  $ACB$  przyprostokątna  $AC$  ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta  $ACB$ .

**Przykładowe rozwiązania**

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta  $ACB$  możemy zapisać na dwa sposoby. Ze wzoru na pole trójkąta z podstawą i prostopadłą doń wysokością trójkąta otrzymujemy

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot a = \frac{5}{2} a,$$

a ze wzoru na pole trójkąta z promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt otrzymujemy

$$P_{ACB} = p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (|AC| + |BC| + |AB|) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (5 + a + c) \cdot 2 = a + c + 5.$$

Stąd otrzymujemy

$$a + c + 5 = \frac{5}{2} a,$$

$$c = \frac{3}{2} a - 5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$5^2 + a^2 = \left(\frac{3}{2} a - 5\right)^2,$$

$$25 + a^2 = \frac{9}{4} a^2 - 15a + 25,$$

$$\frac{5}{4} a^2 - 15a = 0,$$

$$\frac{5}{4} a(a - 12) = 0.$$

Stąd

$$a = 0 \text{ lub } a = 12.$$

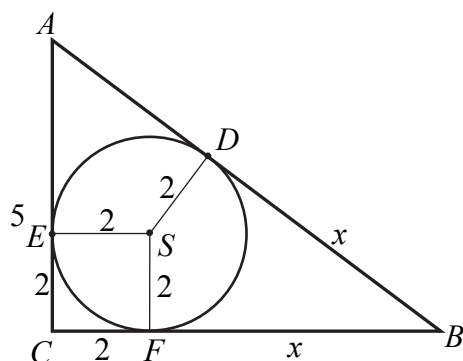
Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania, więc  $a = 12$ .

Pole trójkąta  $ACB$  jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2} a = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30.$$

II sposób

Poprowadźmy promień okręgu wpisanego w trójkąt  $ACB$  do punktów styczności tego okręgu z bokami tego trójkąta i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Czworokąt  $CFSE$  jest kwadratem o boku długości 2, gdyż kąty przy wierzchołkach  $C$ ,  $F$  i  $E$  są proste, a boki  $ES$  i  $FS$  są równej długości. Zatem  $|EC| = |FC| = 2$ .

Stąd wynika, że  $|AE| = |AC| - |EC| = 5 - 2 = 3$ .

Oznaczmy  $x = |BF|$ . Zatem  $|BC| = |BF| + |CF| = x + 2$ .

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy

$$|BD| = |BF| = x \text{ oraz } |AD| = |AE| = 3.$$

Zatem  $|AB| = |AD| + |BD| = 3 + x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ABC$  otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2,$$

$$(3+x)^2 = 5^2 + (x+2)^2,$$

$$9 + 6x + x^2 = 25 + x^2 + 4x + 4,$$

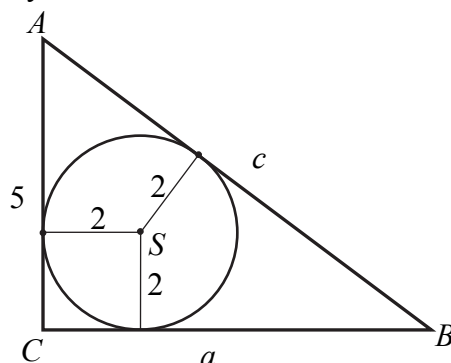
$$x = 10.$$

Przyprostokątna  $AC$  ma więc długość  $|BC| = x + 2 = 12$ , więc pole trójkąta  $ACB$  jest równe

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

### III sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny otrzymujemy

$$2 = \frac{5+a-c}{2},$$

$$4 = 5 + a - c,$$

$$c = a + 1.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$5^2 + a^2 = c^2.$$

Zatem

$$5^2 + a^2 = (a+1)^2,$$

$$25 + a^2 = a^2 + 2a + 1,$$

$$2a = 24,$$
$$a = 12.$$

Pole trójkąta  $ACB$  równe więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 p.

Zdający

- zapisze zależność między długościami przyprostokątnej  $BC$  i przeciwprostokątnej trójkąta, np.:  $5^2 + a^2 = c^2$  lub  $a + c + 5 = \frac{5}{2}a$  lub  $2 = \frac{5+a-c}{2}$

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku równości co najmniej dwóch par odpowiednich odcinków, wynikające z twierdzenia o odcinkach stycznych, np.:  $|EC| = |FC|$  i  $|BF| = |BD|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć długość przyprostokątnej  $BC$ , np.:  $(c = \frac{3}{2}a - 5$  i  $5^2 + a^2 = c^2)$  lub  $(2 = \frac{5+a-c}{2}$  i  $5^2 + a^2 = c^2)$

albo

- zapisze długości boków  $BC$  i  $AB$  trójkąta  $ACB$  w zależności od jednej zmiennej, np. długości  $x$  odcinka  $BF$ :  $|BC| = x + 2$ ,  $|AB| = x + 3$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą prowadzące do wyznaczenia długości boków  $BC$  i  $AB$  trójkąta, np.:  $5^2 + a^2 = (\frac{3}{2}a - 5)^2$  lub  $(x + 3)^2 = (x + 2)^2 + 5^2$  lub  $5^2 + a^2 = (a + 1)^2$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 p.

Zdający obliczy pole trójkąta  $ACB$ :  $P_{ACB} = 30$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując nieistniejący wzór „kwadrat sumy/różnicy = suma/różnica kwadratów”, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik  $\frac{1}{2}$ , to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przyprostokątnej  $BC$ , to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**, o ile poprawnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przeciwprostokątnej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, za zapisanie (zaznaczenie) równości odcinków stycznych.