CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-600, MMAP-R0-700, MMAP-R0-Q00, MMAP-R0-Z00
Termin egzaminu:	2 czerwca 2023 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne obliczenie $a-b$: 2023.

1 pkt – obliczenie a: $a=45^2$

ALBO

– obliczenie b: $b=2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy a:

$$a=4^{\log_2 45}=(2^2)^{\log_2 45}=2^{\log_2 45^2}=45^2=2025$$

Stosujemy wzór na zamianę postawy logarytmu i obliczamy b:

$$b=\frac{\log_3 2023}{\log_9 2023}=\frac{\log_3 2023}{\frac{\log_3 2023}{\log_3 9}}=\log_3 9=2$$

Zatem $a-b=2023$.

[1]Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).

Zadanie 2. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $n = 9$.

2 pkt – zapisanie równania z niewiadomą n, które wynika z warunków zadania, np.
$n! = 12 \cdot (n-2)! \cdot 3!$.

1 pkt – zapisanie, że liczba wszystkich sposobów ustawienia n osób w kolejce jest równa $n!$

ALBO

– zapisanie, że trzy kolejne miejsca spośród n miejsc można wybrać na $n-3$ sposoby (lub na $\binom{n}{n-3}$ sposoby),

ALBO

– potraktowanie Ani i jej dwóch znajomych jak jednej osoby i zapisanie, że liczba ustawień tych $n-2$ osób jest równa $(n-2)!$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Liczba wszystkich sposobów ustawienia n osób w kolejce jest równa $n!$.
Liczbę wszystkich tych ciągów, w których Ania i jej dwóch znajomych zajmują trzy sąsiednie miejsca, możemy obliczyć, traktując Anię i jej dwóch znajomych jak „jedną osobę”.
W rezultacie mamy ustawić ciąg złożony z $n-2$ osób, co można zrobić na $(n-2)!$ sposobów. Na ustalonych trzech miejscach Anię i jej dwóch znajomych możemy ustawić na $3!$ sposobów, więc liczba wszystkich tych ciągów, w których Ania i jej dwóch znajomych zajmują trzy kolejne miejsca jest równa $(n-2)! \cdot 3!$.
Z warunków zadania wynika równanie

$$n! = 12 \cdot (n-2)! \cdot 3!$$

Stąd, po podzieleniu obu stron tego równania przez $(n-2)!$, otrzymujemy:

$$n(n-1) = 12 \cdot 6$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

Ponieważ n jest liczbą całkowitą dodatnią, więc $n + 8 > 0$. Zatem $n - 9 = 0$, czyli $n = 9$.

Uwaga.
Liczbę wszystkich ciągów, w których Ania i jej dwóch znajomych zajmują trzy kolejne miejsca, możemy obliczyć też w następujący sposób.
Trzy kolejne miejsca spośród n miejsc możemy wybrać na $n-2$ sposoby. Na wybranych trzech miejscach Anię i jej dwóch znajomych możemy ustawić na $3!$ sposobów, a na pozostałych $n-3$ miejscach możemy pozostałe osoby ustawić na $(n-3)!$ sposobów.
Zatem liczba szukanych ciągów jest równa $(n-2)\cdot 3!\cdot (n-3)! = (n-2)!\cdot 3!$

Zadanie 3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $0{,}97$.

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach Bernoullego i zapisanie prawdopodobieństwa w postaci

$$P(A)=\binom{7}{0}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^7+\binom{7}{1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^6+\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^5 .$$

1 pkt – ustalenie i zapisanie liczby prób (n), liczby sukcesów (k), prawdopodobieństwa sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie w schemacie Bernoullego: $n=7$, $k\le 2,\ p=\frac{1}{10},\ q=\frac{9}{10}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający poprawnie zapisze $P(S_7^0)=\binom{7}{0}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^7$, $P(S_7^1)=\binom{7}{1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^6$, oraz $P(S_7^2)=\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^5$, ale z dalszego rozwiązania nie wynika, że $P(A)=P(S_7^0)+P(S_7^1)+P(S_7^2)$, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q): $p=\frac{1}{10}$, $q=1-p=\frac{9}{10}$.

Niech S_7^k oznacza zdarzenie polegające na wystąpieniu awarii w godzinach porannych dokładnie w k dniach spośród siedmiu rozpatrywanych ($k\in\{0,1,2\}$).

Obliczamy prawdopodobieństwo P wystąpienia awarii w godzinach porannych w co najwyżej dwóch dniach spośród siedmiu:

$$P(A)=P(S_7^0)+P(S_7^1)+P(S_7^2)=$$

$$=\binom{7}{0}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^7+\binom{7}{1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^6+\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^5=$$

$$=\frac{9^7+7\cdot 9^6+21\cdot 9^5}{10^7}=\frac{9^5\cdot 165}{10^7}=\frac{9\,743\,085}{10\,000\,000}\approx 0{,}97$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x_0 = 2$ oraz $y = 17x - 16$.

2 pkt – obliczenie odciętej x_0 punktu P i wyznaczenie pochodnej funkcji f: $x_0 = 2$ oraz $f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$.

1 pkt – obliczenie odciętej x_0 punktu P: $x_0 = 2$

ALBO

– wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy odciętą x_0 punktu P:

$$18 = 2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0$$

$$2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0 - 18 = 0$$

$$2x_0^2(x_0 - 2) + 9(x_0 - 2) = 0$$

$$(2x_0^2 + 9)(x_0 - 2) = 0$$

$$2x_0^2 + 9 = 0 \quad \text{lub} \quad x_0 - 2 = 0$$

Ponieważ $2x_0^2 + 9 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x_0, więc $x_0 = 2$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu stycznej:

$$a = f'(2) = 17$$

Obliczamy współczynnik b w równaniu stycznej:

$$18 = 17 \cdot 2 + b$$

$$b = -16$$

Styczna ma równanie $y = 17x - 16$.

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych. III.R1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty i uzasadnienie prawdziwości nierówności $\frac{(a-2)^2(a+4)}{a} \geq 0$ lub $(a-2)^2(a+4) \geq 0$, lub $a(a-2)^2(a+4) \geq 0$ z powołaniem się na założenie (dla sposobu I)

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty i przekształcenie nierówności $\frac{a^2+\frac{8}{a}+\frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}}$ do postaci tezy (dla sposobu II),

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty oraz obliczenie $f(2)$: $f(2) = 12$ (dla sposobu III).

2 pkt – przekształcenie nierówności $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ do postaci $\frac{(a-2)^2(a+4)}{a} \geq 0$ lub $(a-2)^2(a+4) \geq 0$, lub $a(a-2)^2(a+4) \geq 0$ (dla sposobu I)

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 1 punkt oraz zapisanie wielomianu $a^3 - 12a + 16$ w postaci $(a-2)^2(a+4)$ (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie, że dla każdego $a > 0$ liczby $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ są dodatnie oraz zapisanie nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$:
$\frac{a^2+\frac{8}{a}+\frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}}$ (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji f oraz wyznaczenie w przedziale $(0, +\infty)$ argumentu, dla którego funkcja osiąga w tym przedziale wartość najmniejszą (wraz z uzasadnieniem): $a = 2$ (dla sposobu III).

1 pkt – przekształcenie nierówności $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ do postaci $\frac{a^3-12a+16}{a} \geq 0$ lub $a^3 - 12a + 16 \geq 0$, lub $a(a^3 - 12a + 16) \geq 0$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie, że dla każdego $a > 0$ liczby $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ są dodatnie (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie pochodnej funkcji f określonej wzorem $f(a) = a^2 + \frac{16}{a}$ dla $a > 0$ (lub w szerszym zakresie), np. $f'(a) = 2a - \frac{16}{a^2}$ (dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano nieprawidłową metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeśli zdający opiera swoje rozwiązanie na nierówności między średnimi (sposób III) i stosuje nierówność między średnimi liczb $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ bez zapisania, że liczby te są dodatnie, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy nierówność $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$:

$$\frac{a^3}{a} + \frac{16}{a} - \frac{12a}{a} \geq 0$$

$$\frac{a^3 - 12a + 16}{a} \geq 0$$

$$a(a^3 - 12a + 16) \geq 0 \quad \text{i} \quad a \neq 0$$

Zauważamy, że pierwiastkiem wielomianu $W(a) = a^3 - 12a + 16$ jest liczba 2. Stąd $W(a) = (a-2)(a^2 + 2a - 8)$. Ponieważ pierwiastkami trójmianu kwadratowego $a^2 + 2a - 8$ są liczby 2 i (-4), więc $W(a) = (a-2)^2(a+4)$. Zatem nierówność $a(a^3 - 12a + 16) \geq 0$ można równoważnie zapisać w postaci

$$a(a-2)^2(a+4) \geq 0$$

Dla każdej liczby dodatniej a wyrażenie $(a-2)^2$ jest liczbą nieujemną, natomiast wyrażenie $(a+4)$ jest liczbą dodatnią. Zatem dla każdej liczby dodatniej a wyrażenie $a(a-2)^2(a+4)$ jest nieujemne jako iloczyn liczb nieujemnych. Oznacza to, że nierówność $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a. To należało wykazać.

<u>Inna realizacja rozkładu wielomianu $a^3 - 12a + 16$ na czynniki:</u>

$$a^3 - 12a + 16 = a^3 - 16a + 4a + 16 = a(a^2 - 16) + 4(a+4) =$$
$$= a(a-4)(a+4) + 4(a+4) = (a+4)[a(a-4) + 4] =$$
$$= (a+4)(a^2 - 4a + 4) = (a+4)(a-2)^2$$

Sposób II

Dla każdego $a > 0$ liczby $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ są dodatnie. Korzystamy z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ i otrzymujemy:

$$\frac{a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}}$$

$$\frac{a^2 + \frac{16}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{64}$$

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

To należało wykazać.

Sposób III

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(a) = a^2 + \frac{16}{a}$ dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(a) = 2a - \frac{16}{a^2} = \frac{2a^3 - 16}{a^2}$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f:

$$\frac{2a^3 - 16}{a^2} = 0$$

$$2a^3 - 16 = 0$$

$$a = 2$$

Ponieważ $f'(a) > 0$ dla $a \in (2, +\infty)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (0, 2)$, więc funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 2]$ oraz jest rosnąca w przedziale $[2, +\infty)$.

Zatem dla argumentu $a = 2$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą $f(2) = 2^2 + \frac{16}{2} = 12$. Stąd $f(a) \geq 12$ dla każdej liczby dodatniej a.

To oznacza, że nierówność $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ jest prawdziwa dla każdego $a > 0$.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Zasady oceniania

3 pkt – spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty oraz uzasadnienie, że $|AC| = |BC|$.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinków AP, AQ, BD, CD, CQ w zależności od tej samej zmiennej, np. $|AP| = 5x$, $|AQ| = 5x$, $|BD| = x$, $|CD| = 2x$, $|CQ| = 2x$.

1 pkt – zapisanie równości wynikającej z twierdzenia o odcinkach stycznych: $|BD| = |BP|$ (lub $|AP| = |AQ|$, lub $|CQ| = |CD|$).

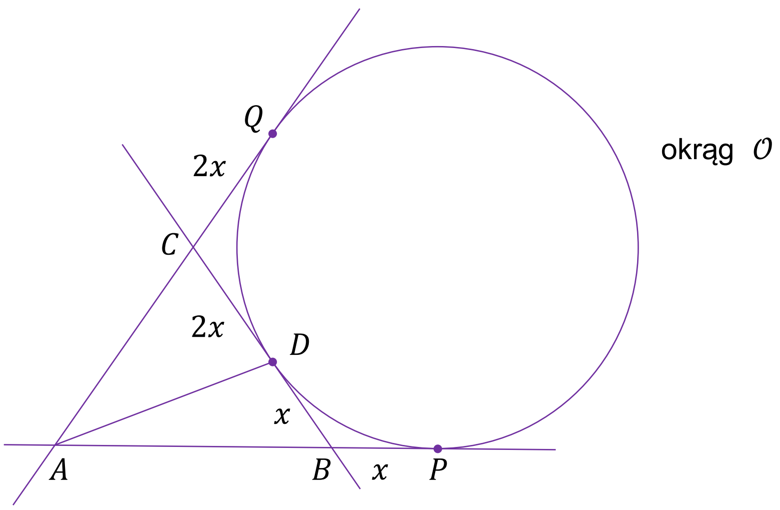
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $|BP| = x$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że $|BD| = |BP| = x$.

Z założenia $|CD| = 2 \cdot |BD|$ otrzymujemy $|CD| = 2x$. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że $|CQ| = |CD| = 2x$ (zobacz rysunek).



Ponieważ $|AQ| = 5 \cdot |BP|$, więc $|AQ| = 5x$. Ponownie z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że $|AP| = |AQ| = 5x$.

Zatem $|AC| = |AQ| - |CQ| = 5x - 2x = 3x$ oraz $|BC| = |BD| + |CD| = x + 2x = 3x$.

Wobec tego $|AC| = |BC|$, więc trójkąt ABC jest równoramienny. To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej x, dla których suma szeregu istnieje $(x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$) oraz poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej x, dla których suma jest równa $\frac{15}{2}$: $x = 6$.

3 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości x, dla których istnieje skończona suma szeregu ($x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy i zapisanie równania z niewiadomą x:
$\frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$

ALBO

– zapisanie warunku zbieżności szeregu ($|q| < 1$) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy, zapisanie równania z niewiadomą x ($\frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$) i rozwiązanie tego równania: $x = -\frac{5}{4}$, $x = 6$.

2 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości x, dla których istnieje skończona suma szeregu: $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

ALBO

– zapisanie warunku zbieżności szeregu ($|q| < 1$) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy i zapisanie równania z niewiadomą x:

$$\frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$$

1 pkt – zapisanie ilorazu: $q = -\frac{3}{x-1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeśli zdający rozwiąże odpowiednie równanie i zapisze: $x = -\frac{5}{4} \lor x = 6$, a następnie obliczy iloraz szeregu dla każdej z wyznaczonych wartości zmiennych i na tej podstawie dokona właściwego wyboru rozwiązania, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie bez rozważenia warunku $|q| < 1$, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.
3. Jeśli zdający zapisze poprawny warunek zbieżności szeregu: $\left|-\frac{3}{x-1}\right| < 1$, ale popełni błąd przy wyznaczaniu przedziału zbieżności i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać **3 punkty**.

4. Jeżeli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu ilorazu ciągu, który będzie wyrażeniem wymiernym zmiennej x, np. zapisze, że $q = -\frac{3x}{x-1}$, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

5. Jeśli zdający zapisze dany szereg jako sumę dwóch szeregów postaci $2x + \frac{18x}{(x-1)^2} + \frac{172x}{(x-1)^4} + \ldots$ oraz $-\frac{6x}{x-1} - \frac{54x}{(x-1)^3} - \frac{516x}{(x-1)^5} - \ldots$ bez odpowiedniego komentarza i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, obliczając sumę dwóch szeregów, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy wyraz i iloraz tego szeregu są równe, odpowiednio, $a_1 = 2x$ oraz $q = -\frac{3}{x-1}$. Ponieważ $x \neq 1$ i $x \neq 0$, to szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\left|-\frac{3}{x-1}\right| < 1$, czyli $|x-1| > 3$. Stąd $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

Wtedy suma S tego szeregu jest skończona i równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{2x(x-1)}{x+2}$$

Rozwiązujemy równanie $\frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$ w zbiorze $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$:

$$\frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$$

$$4x(x-1) = 15(x+2)$$

$$4x^2 - 19x - 30 = 0$$

$$x = -\frac{5}{4} \notin (-\infty, -2) \cup (4, +\infty) \quad \text{lub} \quad x = 6 \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

Zatem $x = 6$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x\cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne metoda rozwiązania równania i poprawny wynik: $-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (lub równania $\cos x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$)
w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– przekształcenie równania do alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych i rozwiązanie jednego z tych równań w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

ALBO

– przekształcenie równania do alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych i rozwiązanie wszystkich równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$.

2 pkt – równoważne przekształcenie równania do postaci, która jest równością sinusów lub cosinusów, np. $\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów lub na sumę cosinusów i przekształcenie równania do postaci alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych, np.
$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ lub $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$ lub $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0$.

1 pkt – zastosowanie wzoru redukcyjnego i przekształcenie równania do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna, np. $\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$,
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \cos x = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (równość sinusów)

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x:

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\sin(5x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Ponieważ funkcja sinus jest nieparzysta, więc

$$\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Stąd

$$5x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 5x = \pi - (x - \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wyznaczamy rozwiązania równania $\sin(5x) + \cos x = 0$ w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$$

Sposób II (poprzez sumę sinusów)

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x:

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sinusów i otrzymujemy

$$2\sin\left(\frac{5x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{lub} \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \quad \text{lub} \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wyznaczamy rozwiązania równania $\sin(5x) + \cos x = 0$ w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych. IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania i poprawny wynik: $P=20$.
3 pkt – obliczenie wysokości CD trójkąta ABC: $|CD|=4$.
2 pkt – obliczenie (podanie) długości odcinków AD i BD: $|AD|=8$ oraz $|DB|=2$.
1 pkt – zapisanie, że bok AB trójkąta ABC jest średnicą danego okręgu

ALBO

– zapisanie, że środek $S=(1,2)$ danego okręgu leży na prostej o równaniu $4x-3y+2=0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania i poprawny wynik: $P=20$.
3 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka C trójkąta ABC: $C=(6,2)$ lub $C=\left(-\frac{2}{5},\frac{34}{5}\right)$.
2 pkt – obliczenie współrzędnych punktu D: $D=\left(\frac{14}{5},\frac{22}{5}\right)$.
1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A i B, np. $A=(-2,-2)$ i $B=(4,6)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeśli zdający popełnia w rozwiązaniu błąd merytoryczny albo błędnie odgaduje np. długości odcinków AD i BD, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ prosta o równaniu $4x-3y+2=0$ przechodzi przez środek $S=(1,2)$ danego okręgu, więc bok AB jest średnicą tego okręgu. Zatem $|AB|=10$. Wysokość CD dzieli bok AB tak, że $|AD|=4|DB|$. Stąd i z $|AD|+|DB|=10$ wynika, że $|AD|=8$ oraz $|DB|=2$. Ponieważ kąt ACB jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na średnicy, więc jest kątem prostym. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną AB tak, że $|CD|=\sqrt{|AD|\cdot|DB|}=\sqrt{8\cdot 2}=4$. Zatem pole P trójkąta ABC jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

Sposób II

Ponieważ prosta o równaniu $4x - 3y + 2 = 0$ przechodzi przez środek $S = (1, 2)$ danego okręgu, więc bok AB jest średnicą tego okręgu. Obliczamy współrzędne punktów A i B, rozwiązując układ równań: $4x - 3y + 2 = 0$ i $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Z pierwszego z równań układu wyznaczamy x: $x = \frac{3y-2}{4}$ i podstawiamy do drugiego z równań układu, otrzymując kolejno:

$$\left(\frac{3y-2}{4} - 1\right)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$\left(\frac{3y-6}{4}\right)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$\frac{9}{16}(y-2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$(y-2)^2 = 16$$

$$|y-2| = 4$$

$$y = -2 \quad \text{lub} \quad y = 6$$

Gdy $y = -2$, to $x = -2$. Gdy $y = 6$, to $x = 4$.

Ze względu na symetrię, możemy przyjąć, że $A = (-2, -2)$ i $B = (4, 6)$. Wtedy $|AB| = 10$.

Ponieważ $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$, więc $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5} \cdot [6,\ 8] = \left[\frac{24}{5},\ \frac{32}{5}\right]$. Stąd wynika, że $D = \left(\frac{14}{5},\ \frac{22}{5}\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej, która zawiera wysokość CD trójkąta ABC: $y = ax + b$

Prosta ta jest prostopadła do prostej $4x - 3y + 2 = 0$, więc $\frac{4}{3} \cdot a = -1$. Stąd $a = -\frac{3}{4}$.

Wykorzystując współrzędne punktu D, otrzymujemy $\frac{22}{5} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{5} + b$, czyli $b = \frac{13}{2}$.

Wyznaczamy współrzędne punktu C, rozwiązując układ równań

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2} \quad \text{i} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Otrzymujemy

$$(x-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{13}{2} - 2\right)^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}\right)^2 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{81}{4} - 25 = 0$$

$$5x^2 - 28x - 12 = 0$$

$$(x-6)(5x+2) = 0$$

$$x = 6 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2}{5}$$

Stąd $C = (6, 2)$ lub $C = \left(-\frac{2}{5}, \frac{34}{5}\right)$.
Obliczamy wysokość trójkąta ABC.
Dla $C = (6, 2)$ otrzymujemy $|DC| = \sqrt{\left(6 - \frac{14}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{22}{5}\right)^2} = 4$.
Dla $C = \left(-\frac{2}{5}, \frac{34}{5}\right)$ otrzymujemy $|DC| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5} - \frac{14}{5}\right)^2 + \left(\frac{34}{5} - \frac{22}{5}\right)^2} = 4$.
Zatem pole P trójkąta ABC jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

Uwaga:
Przyjmując $A = (4, 6)$ i $B = (-2, -2)$, otrzymujemy $D = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. Wtedy prosta, która zawiera wysokość CD trójkąta ABC, ma równanie $y = -\frac{3}{4}x - 1$. Współrzędne punktu C obliczamy, rozwiązując układ równań: $y = -\frac{3}{4}x - 1$ i $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.
Otrzymujemy: $C = (-4, 2)$ lub $C = \left(\frac{12}{5}, -\frac{14}{5}\right)$. Dla obu tych przypadków $|CD| = 4$ i pole $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu warunku $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Drugi etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – wyznaczenie tych wszystkich wartości m, dla których spełniony jest warunek
$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$: $m \in \left(-4 - 2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, -4 + 2\sqrt{6}\right)$.

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m, która odpowiada warunkowi
$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$, np. $\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{(-2m+3)}{m}}{\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2} < 1$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $\frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} < 1$ (lub innej równoważnej, ale zawierającej jedynie zmienne $x_1 + x_2$ oraz x_1x_2).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, dla których spełnione są jednocześnie warunki: $\Delta > 0$ i $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt.**

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości m, dla których $\Delta > 0$ i $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$:
$m \in \left(-4 - 2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$ (zamiast $\Delta > 0$), to za I etap rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania rozważa niepoprawną nierówność wymierną i rozwiązanie tej nierówności jest zbiorem rozłącznym ze zbiorem rozwiązań nierówności z I etapu, to zdający otrzymuje **0 punktów** za III etap.

3. Jeżeli w rozwiązaniu zdającego nie ma zapisu $m \neq 0$ albo $m \neq \frac{3}{2}$, albo zdający nie uwzględnia w rozwiązaniu warunku $m \neq 0$, albo $m \neq \frac{3}{2}$, to zdający może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $m \neq 0$ i wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3$ jest dodatni.

I etap

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$[-(m+1)]^2 - 4m \cdot (-2m+3) > 0$$

$$9m^2 - 10m + 1 > 0$$

$$(m-1)(9m-1) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$$

Zatem równanie $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste, gdy $m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$.

II etap

Wyznaczymy wszystkie wartości m, dla których jest spełniony warunek: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$.

Przekształcamy nierówność $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ do postaci, która pozwoli na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} < 1$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} < 1$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów Viète'a, otrzymujemy:

$$\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{(-2m+3)}{m}}{\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2} < 1$$

i dalej

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2\cdot\frac{(-2m+3)}{m} < \left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2 \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

$$(m+1)^2 - 2m(-2m+3) < (-2m+3)^2 \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

$$m^2 + 8m - 8 < 0 \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

$$m \in \left(-4-2\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6}\right) \quad \text{i} \quad m \neq 0 \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2}$$

Zatem warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ jest spełniony tylko dla $m \in \left(-4-2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, -4+2\sqrt{6}\right)$.

III etap

Wyznaczamy te wszystkie wartości m, które jednocześnie spełniają warunki: $m \neq 0$ i $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$ i $m \in \left(-4-2\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6}\right)$ i $m \neq \frac{3}{2}$:

$$m \in \left(-4-2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$$

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

5 pkt – obliczenie a, b oraz c: $a = 1$ i $b = 3$ i $c = 9$.

4 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą, np. $a = -\frac{49}{2}$ oraz $a = 1, q = 3$ oraz $q = \frac{4}{7}$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, np. $\left(\frac{2}{3}a + \frac{7}{3}\right)^2 = a\left(\frac{2}{3}a + \frac{25}{3}\right)$,
$4 \cdot \frac{6}{q^2-q} \cdot q = 2 \cdot \frac{6}{q^2-q} + \frac{6}{q^2-q} \cdot q^2 + 1$.

2 pkt – wykorzystanie związku między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz związku między wyrazami ciągu geometrycznego i zapisanie układu warunków z trzema niewiadomymi prowadzącego do rozwiązania zadania, np. $b^2 = ac$ i $2b = \frac{2a+c+1}{2}$ i $c - b = 6$

ALBO

– zapisanie wyrazów ciągu geometrycznego za pomocą jednej zmiennej/niewiadomej, np. $\left(a, \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}, \frac{2}{3}a + \frac{25}{3}\right)$,

ALBO

– zapisanie wyrazów ciągu arytmetycznego za pomocą jednej zmiennej/niewiadomej, np. $\left(\frac{b^2}{b+6}, 2b, b + 6\right)$,

ALBO

– wykorzystanie związku między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz związku między wyrazami ciągu geometrycznego i zapisanie układu warunków z dwiema niewiadomymi prowadzącego do rozwiązania zadania, np.
$2aq = \frac{2a+aq^2+1}{2}$ i $aq^2 - aq = 6$.

1 pkt – wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania $2b = \frac{2a+c+1}{2}$

ALBO

– wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania
$2b = \frac{2a+b+6+1}{2}$,

ALBO

– wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równania $b^2 = ac$,

ALBO

– wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równania $aq^2 - aq = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z warunku $c - b = 6$ wyznaczamy c: $c = b + 6$.
Zatem ciąg $(2a, 2b, b + 7)$ jest arytmetyczny. Korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i otrzymujemy $2b = \frac{2a+b+7}{2}$. Stąd $4b = 2a + b + 7$, czyli $b = \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}$.
Z zależności $c = b + 6$ oraz $b = \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}$ otrzymujemy $c = \frac{2}{3}a + \frac{25}{3}$. Zatem ciąg $\left(a, \frac{2}{3}a + \frac{7}{3}, \frac{2}{3}a + \frac{25}{3}\right)$ jest geometryczny.
Korzystamy z własności ciągu geometrycznego i otrzymujemy

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{7}{3}\right)^2 = a \cdot \left(\frac{2}{3}a + \frac{25}{3}\right) \quad / \cdot 9$$

$$(2a + 7)^2 = a \cdot (6a + 75)$$

$$0 = 2a^2 + 47a - 49$$

$$\Delta = 47^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-49) = 2601, \quad \sqrt{\Delta} = 51$$

$$a = -\frac{49}{2} \quad \text{lub} \quad a = 1$$

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (a, b, c) są dodatnie, więc $a = 1$.
Wtedy $b = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{7}{3} = 3$ i $c = 3 + 6 = 9$. Stąd $(a, b, c) = (1, 3, 9)$ i $(2a, 2b, c + 1) = (2, 6, 10)$.
Ciąg $(1, 3, 9)$ ma wszystkie wyrazy dodatnie i jest geometryczny (o ilorazie 3), ciąg $(2, 6, 10)$ jest arytmetyczny (o różnicy 4).
Zatem ostatecznie $a = 1$, $b = 3$ oraz $c = 9$.

Sposób II

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, więc ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego otrzymujemy $b = aq$ oraz $c = aq^2$. Z warunku $c - b = 6$ otrzymujemy $aq^2 - aq = 6$. Stąd $aq(q - 1) = 6$.
Z warunków zadania $a \neq 0$. Gdyby $q = 0$ lub $q = 1$, to równanie $aq(q - 1) = 6$ byłoby sprzeczne. Zatem $q \neq 0$ oraz $q \neq 1$. Wtedy $a = \frac{6}{q^2 - q}$.
Ciąg $(2a, 2b, c + 1)$ jest arytmetyczny, więc korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i otrzymujemy $2aq = \frac{2a + aq^2 + 1}{2}$, czyli $4aq = 2a + aq^2 + 1$.
Wykorzystując związki $a = \frac{6}{q^2 - q}$ i $4aq = 2a + aq^2 + 1$, otrzymujemy

$$4 \cdot \frac{6}{q^2 - q} \cdot q = 2 \cdot \frac{6}{q^2 - q} + \frac{6}{q^2 - q} \cdot q^2 + 1$$

Stąd dalej otrzymujemy:

$$\frac{24q}{q^2 - q} = \frac{12}{q^2 - q} + \frac{6q^2}{q^2 - q} + 1$$

$$24q = 12 + 6q^2 + q^2 - q$$

$$7q^2 - 25q + 12 = 0$$

$$(q-3)(7q-4)=0$$

$$q=3 \quad \text{lub} \quad q=\frac{4}{7}$$

Gdy $q=\frac{4}{7}$, to wtedy $a=\frac{6}{\left(\frac{4}{7}\right)^2-\frac{4}{7}}<0$, więc dla tej wartości q warunki zadania nie są spełnione.

Gdy $q=3$, to wtedy $a=\frac{6}{3^2-3}=1$, $b=3$ i $c=9$.

Ciąg $(1,3,9)$ ma wszystkie wyrazy dodatnie i jest geometryczny (o ilorazie 3), ciąg $(2,6,10)$ jest arytmetyczny (o różnicy 4).

Zatem ostatecznie $a=1$, $b=3$ oraz $c=9$.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie odrzuci ujemnego rozwiązania $a=-\frac{49}{2}$ i w konsekwencji poda dwie trójki liczb a, b i c, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

5 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz poprawny wynik: $|AB| = 2\sqrt{10}$, $|BC| = 3\sqrt{6}$, $|CD| = \sqrt{10}$, $|AD| = 2\sqrt{6}$.

4 pkt – obliczenie długości boków AB i AD: $|AB| = 2\sqrt{10}$ i $|AD| = 2\sqrt{6}$ oraz spełnienie jednego z poniższych kryteriów I–III:

I. obliczenie długości odcinka CE: $|CE| = 3$,

II. wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów DEC i AEB: $\frac{1}{2}$,

III. obliczenie długości jednego z boków tego czworokąta i zapisanie wyrażenia arytmetycznego opisującego długości pozostałych boków w zależności od długości tego obliczonego boku.

3 pkt – obliczenie długości boków AB i AD: $|AB| = 2\sqrt{10}$ i $|AD| = 2\sqrt{6}$.

2 pkt – obliczenie wysokości AP trójkąta ASE: $|AP| = \sqrt{15}$

ALBO

– obliczenie długości odcinka CE: $|CE| = 3$,

ALBO

– wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów DEC i AEB: $\frac{1}{2}$,

ALBO

– obliczenie długości odcinków DE, BE, AE: $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ i $|AE| = 4$ oraz zapisanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia długości boków a oraz d: $a^2 + d^2 = 8^2$, $a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\beta$ oraz $d^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(180° - \beta)$.

1 pkt – obliczenie długości odcinków DE, BE oraz AE: $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ oraz $|AE| = 4$

ALBO

– zapisanie, że trójkąty DEC oraz AEB (albo trójkąty BEC oraz AED) są podobne,

ALBO

– zapisanie równości wynikającej z twierdzenia o odcinkach siecznych: $|AE| \cdot |CE| = |BE| \cdot |DE|$.

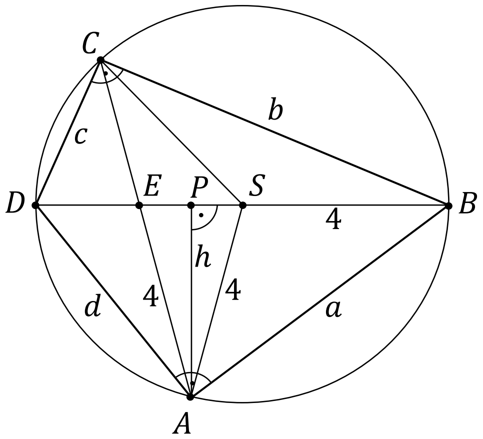
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeśli zdający zapisze, że $|DE| = 1$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ trójkąty ABD i BCD są prostokątne, to ich wspólna przeciwprostokątna BD jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Zatem $|BD| = 8$. Stąd i z warunków $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$ otrzymujemy $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ i $|AE| = 4$.
Oznaczmy przez S środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Prowadzimy wysokość AP trójkąta ASE i przyjmijmy pozostałe oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ $|AE| = 4 = |AS|$, więc trójkąt ASE jest równoramienny. Zatem spodek P wysokości trójkąta ASE jest środkiem podstawy ES tego trójkąta. Stąd wynika, że $|EP| = |PS| = 1$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASP otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AP|^2 + |PS|^2$$

$$4^2 = h^2 + 1^2$$

$$h^2 = 15$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABP i ADP otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2 \quad \text{oraz} \quad |AD|^2 = |AP|^2 + |PD|^2$$

$$a^2 = h^2 + 5^2 \quad \text{oraz} \quad d^2 = h^2 + 3^2$$

$$a^2 = 15 + 25 \quad \text{oraz} \quad d^2 = 15 + 9$$

$$a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad \text{oraz} \quad d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Kąty DCA i ABD są równe, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku AD. Kąty DEC i BEA są równe, gdyż są to kąty wierzchołkowe. Zatem trójkąty DEC i BEA są podobne (cecha *kkk*). Wynika stąd, że

$$\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

$$\frac{c}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{4}$$

$$c = \sqrt{10}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD otrzymujemy

$$|BD|^2 = |CD|^2 + |BC|^2$$

$$8^2 = c^2 + b^2$$

$$64 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Uwagi:

1. Długości boków CD i BC można obliczyć, wykorzystując twierdzenie o odcinkach siecznych. Wynika z niego, że $|AE| \cdot |CE| = |BE| \cdot |DE|$, więc $|CE| = 3$. Ponieważ $\cos\sphericalangle AEP = \frac{|EP|}{|AE|} = \frac{1}{4}$, to z twierdzenia cosinusów wynika, że $|CD|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 10$ oraz $|BC|^2 = 6^2 + 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 54$.

2. Po wyznaczeniu odcinków $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ i $|AE| = 4$ można wyznaczyć długości boków a oraz d, korzystając z twierdzenia cosinusów. Przyjmując $\beta = \sphericalangle AEB$, możemy zapisać układ trzech równań: $a^2 + d^2 = 8^2$, $a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\beta$ oraz $d^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(180° - \beta)$. Wtedy $\cos\beta = \frac{1}{4}$ oraz $a = 2\sqrt{10}$ i $d = 2\sqrt{6}$.

Zadanie 13. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

6 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru funkcji $V(h)$ oraz jej dziedziny, oraz wyznaczenie wysokości graniastosłupa o największej objętości wraz z uzasadnieniem.

5 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V: $h = \frac{\sqrt{3}}{3}d$.

4 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V, np. $V'(h) = 2\left(d^2 - 3h^2\right)$.

3 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji $V(h)$: $(0, d)$.

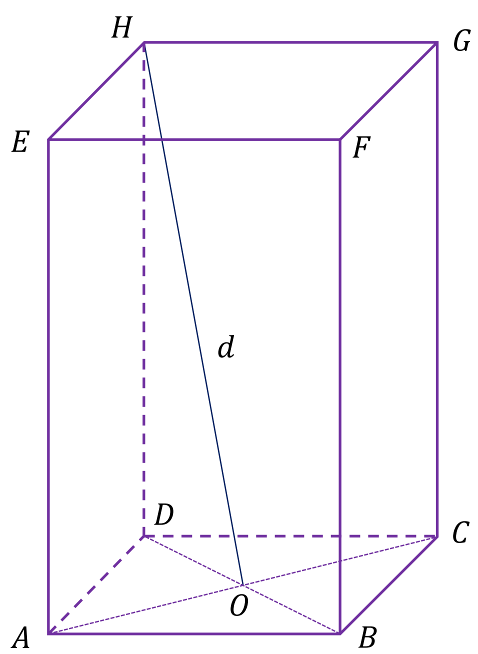
2 pkt – wyznaczenie objętości V graniastosłupa jako funkcji jego wysokości, np. $V(h) = 2(d^2 - h^2) \cdot h$.

1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi podstawy w zależności od wysokości graniastosłupa: $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy graniastosłupa, natomiast przez h – wysokość tego graniastosłupa.



a)

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ODH i otrzymujemy:

$$d^2 = h^2 + |OD|^2$$

$$|OD| = \sqrt{d^2 - h^2}$$

Ponieważ $|OD| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{d^2 - h^2}$.

Stąd $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}$ i $h \in (0, d)$.

Pole P_P podstawy graniastosłupa jest równe

$$P_P = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}\right)^2 = 2(d^2 - h^2)$$

Wyznaczamy objętość graniastosłupa jako funkcję zmiennej h:

$V(h) = 2(d^2 - h^2) \cdot h = 2(d^2 h - h^3)$ dla $0 < h < d$.

b)

Wyznaczamy pochodną funkcji V:

$$V'(h) = 2(d^2 - 3h^2)$$

Obliczamy miejsce zerowe pochodnej funkcji V:

$$V'(h) = 0$$

$$2(d^2 - 3h^2) = 0 \quad \text{i} \quad h \in (0, d)$$

$$h = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Ponieważ $V'(h) > 0$ dla $h \in \left(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$ oraz $V'(h) < 0$ dla $h \in \left(\frac{d}{\sqrt{3}}, d\right)$, więc funkcja V jest rosnąca w przedziale $\left(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\right]$ oraz malejąca w przedziale $\left[\frac{d}{\sqrt{3}}, d\right)$. Zatem funkcja V osiąga wartość największą dla $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Spośród rozważanych graniastosłupów największą objętość ma graniastosłup o wysokości $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$.