ARKUSZ ZAWIERA INFORMACJE PRAWNIE CHRONIONE DO MOMENTU ROZPOCZĘCIA EGZAMINU!

Miejsce na naklejkę

MMA-R1_1P-082

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

MAJ ROK 2008

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

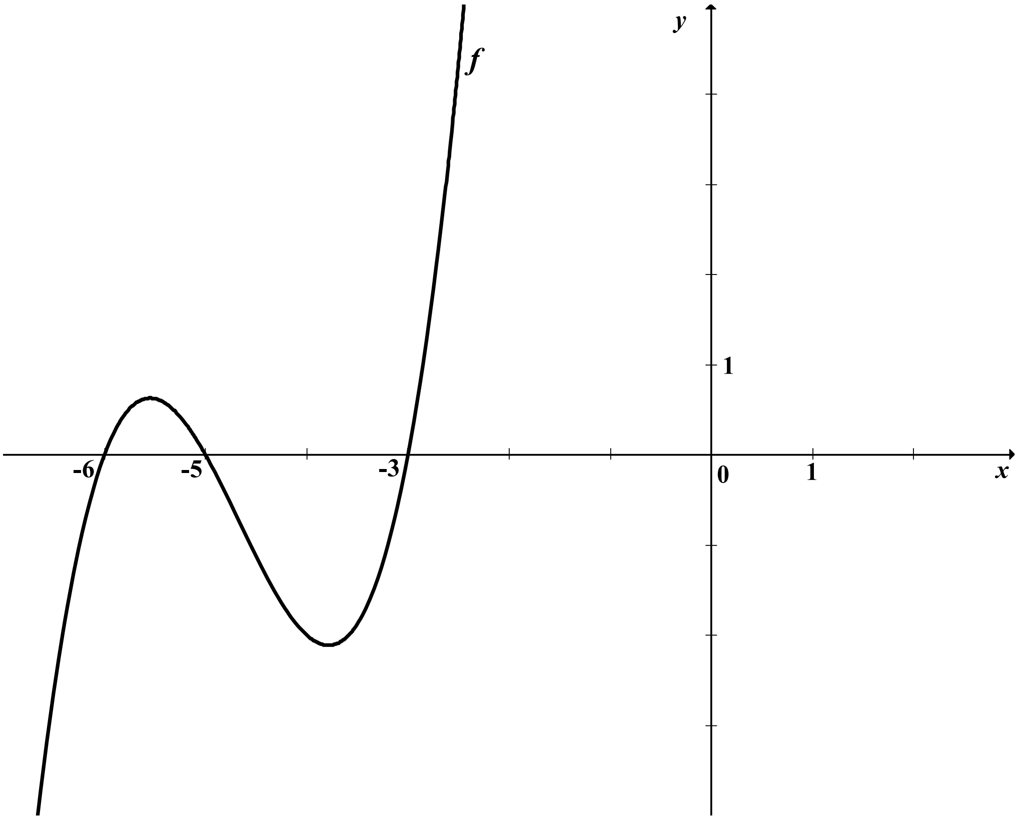
Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Wielomian f, którego fragment wykresu przedstawiono na poniższym rysunku spełnia warunek $f(0) = 90$. Wielomian g dany jest wzorem $g(x) = x^3 - 14x^2 + 63x - 90$. Wykaż, że $g(x) = -f(-x)$ dla $x \in R$.



Z rysunku odczytuję miejsca zerowe funkcji f i zapisuję jej wzór w postaci iloczynowej $f(x) = a(x+6)(x+5)(x+3)$.

Funkcja spełnia warunek $f(0) = 90$, *czyli* $a(0+6)(0+5)(0+3) = 90$.

Obliczam współczynnik a: $a = 1$ *i zapisuję wzór funkcji f*:

$$f(x) = (x+6)(x+5)(x+3).$$

Wzór funkcji f zapisuję w postaci: $f(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$.

$$-f(-x) = -\left[(-x)^3 + 14(-x)^2 + 63(-x) + 90\right] =$$

$$= -\left[-x^3 + 14x^2 - 63x + 90\right] =$$

$$= x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = g(x)$$

Zatem $-f(-x) = g(x)$ *dla* $x \in R$.

Zadanie 2. ***(4 pkt)***
Rozwiąż nierówność $|x-2|+|3x-6|<|x|$.

$|3x-6|=3\cdot|x-2|$, *więc nierówność przyjmuje postać*: $4|x-2|<|x|$.

Rozwiązanie nierówności:

$$\begin{cases} -4(x-2)<-x \text{ gdy } x\in(-\infty,0) \\ -4(x-2)<x \text{ gdy } x\in\langle 0,2) \\ 4(x-2)<x \text{ gdy } x\in\langle 2,\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{8}{3} \text{ gdy } x\in(-\infty,0) \\ x>\frac{8}{5} \text{ gdy } x\in\langle 0,2) \\ x<\frac{8}{3} \text{ gdy } x\in\langle 2,\infty) \end{cases}$$

W przedziale $(-\infty,0)$ *nierówność nie ma rozwiązania.*

Rozwiązaniem nierówności w przedziale $\langle 0,2)$ *są liczby rzeczywiste należące do przedziału* $\left(\frac{8}{5},2\right)$, *natomiast rozwiązaniem nierówności w przedziale* $\langle 2,\infty)$ *są liczby rzeczywiste należące do przedziału* $\left\langle 2,\frac{8}{3}\right)$.

Rozwiązaniem nierówności $|x-2|+|3x-6|<|x|$, *jest więc przedział* $\left(\frac{8}{5},\frac{8}{3}\right)$.

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - \left(p^2 + q^2\right)x + \left(p + q\right) = 0$ z niewiadomą x. Oblicz wartości p i q.

Zapisuję równanie kwadratowe w postaci iloczynowej:

$$\left(x - 5 - \sqrt{23}\right) \cdot \left(x - 5 + \sqrt{23}\right) = 0$$

przekształcam je do postaci ogólnej

$$\left(x - 5\right)^2 - 23 = 0$$

$$x^2 - 10x + 2 = 0$$

Porównuję odpowiednie współczynniki obu postaci równania i stwierdzam, że muszą być spełnione równocześnie dwa warunki: $p^2 + q^2 = 10$ *i* $p + q = 2$.

Rozwiązuję układ równań $\begin{cases} p^2 + q^2 = 10 \\ p + q = 2 \end{cases}$

Dokonuję podstawienia: $q = 2 - p$ *i otrzymuję równanie kwadratowe z jedną niewiadomą*: $p^2 - 2p - 3 = 0$.

Rozwiązaniem tego równania kwadratowego są liczby: $p_1 = 3$ *lub* $p_2 = -1$.

Obliczam wartości q w zależności od p:

Dla $p_1 = 3$, $q_1 = -1$, *natomiast dla* $p_2 = -1$, $q_2 = 3$.

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x = 4\sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Przekształcam równanie: $4\left(1-\sin^2 x\right) = 4\sin x + 1$

$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

Wprowadzam pomocniczą niewiadomą $\sin x = t$ *i* $t \in \langle -1, 1 \rangle$, *i zapisuję równanie*

$$4t^2 + 4t - 3 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $t_1 = \frac{1}{2}$ *lub* $t_2 = -\frac{3}{2}$, $t_2 \notin \langle -1, 1 \rangle$.

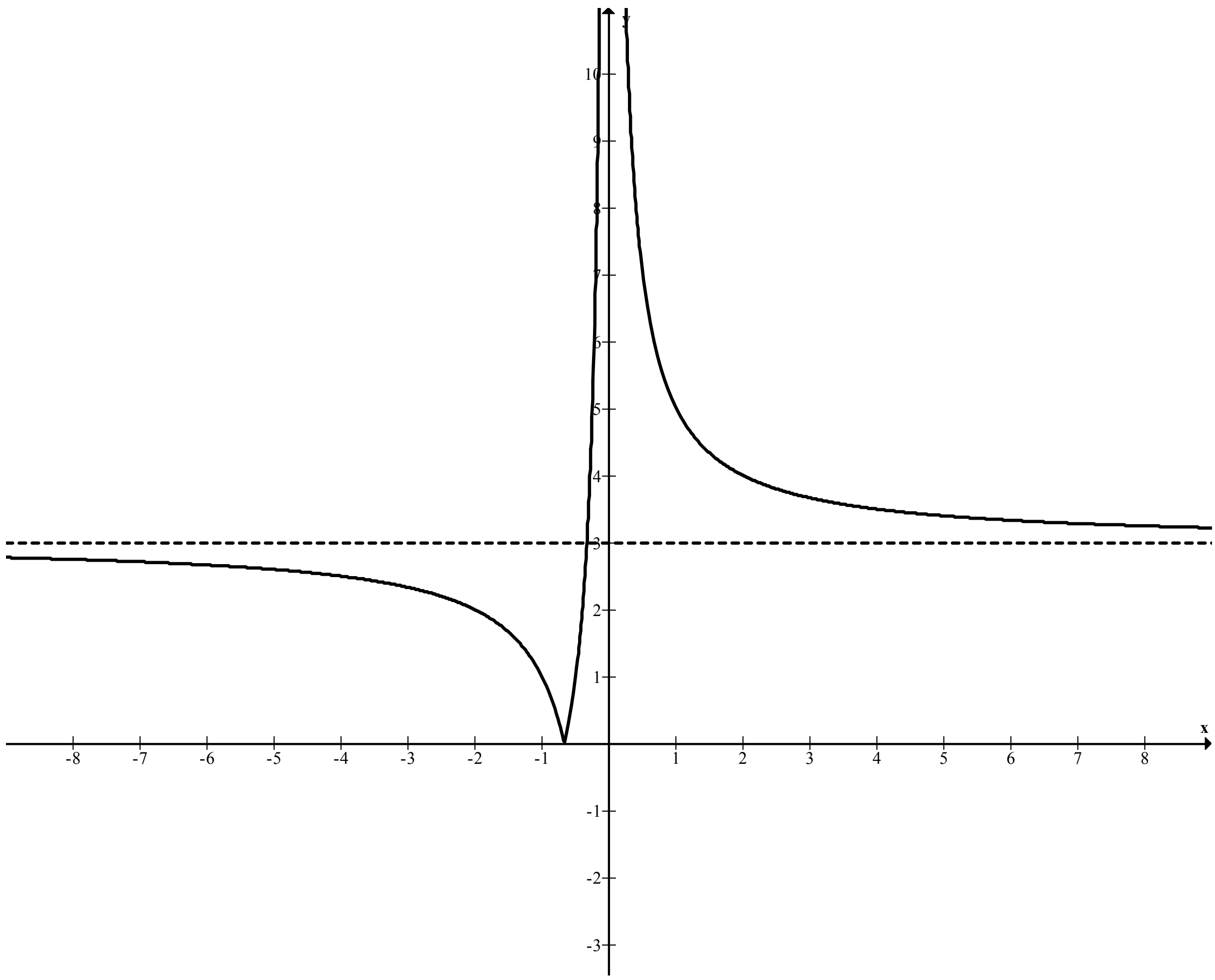
Powracam do podstawienia i otrzymuję: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Rozwiązuję równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ *w przedziale* $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$ *lub* $x = \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Dane jest równanie $\left|\frac{2}{x}+3\right|=p$ z niewiadomą x. Wyznacz liczbę rozwiązań tego równania w zależności od parametru p.

Szkicuję wykres funkcji $f\left(x\right)=\left|\frac{2}{x}+3\right|$ *dla* $x\neq 0$.



Z wykresu odczytuję liczbę rozwiązań równania $\left|\frac{2}{x}+3\right|=p$ *w zależności od parametru* p:

- *dla* $p<0$ *równanie nie ma rozwiązania,*
- *dla* $p=0$ *lub* $p=3$ *równanie ma jedno rozwiązanie,*
- *dla* $0<p<3$ *lub* $p>3$ *równanie ma dwa rozwiązania.*

Zadanie 6. ***(3 pkt)***
Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

Stosuję związki między sąsiednimi wyrazami ciągów arytmetycznego i geometrycznego do zbudowania układu równań:

$$\begin{cases} \dfrac{a+c}{2} = b \\ a \cdot c = b^2 \end{cases}$$

Podstawiam do drugiego równania w miejsce b wyrażenie $\dfrac{a+c}{2}$ *i otrzymuję równanie:* $ac = \left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2$

Wykonuję równoważne przekształcenia:

$$4ac = a^2 + 2ac + c^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$(a-c)^2 = 0$, *a stąd otrzymuję równość* $a = c$.

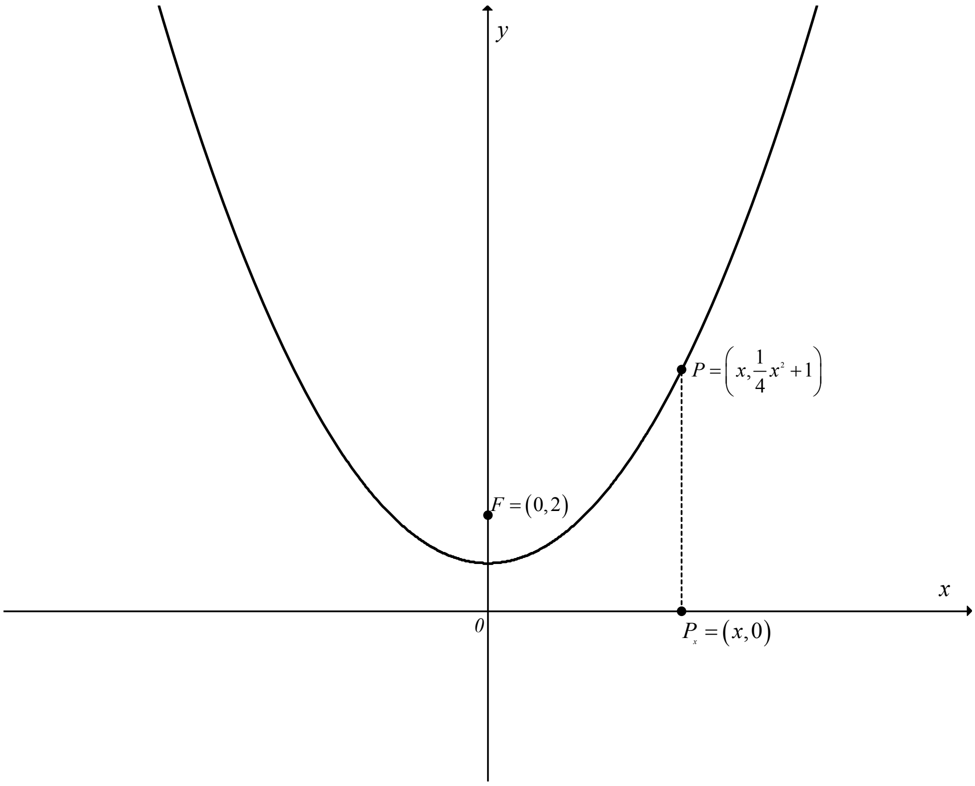
Korzystając z równości $a = c$ *i z pierwszego równania układu otrzymuję:*

$\dfrac{2 \cdot c}{2} = b$, *stąd otrzymuję równość* $c = b$.

Ponieważ zachodzi $a = c$ *i* $b = c$, *więc* $a = b = c$, *co należało udowodnić.*

Zadanie 7. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ jest równoodległy od osi Ox i od punktu $F = (0, 2)$.



Wybieram dowolny punkt P leżący na paraboli i oznaczam jego współrzędne w zależności od jednej zmiennej $P = \left(x,\ \frac{1}{4}x^2 + 1\right)$.

Punkt $P_x = (x,0)$ *jest rzutem punktu P na oś Ox. Odległość punktu P od osi Ox jest równa* $|PP_x| = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right|$.

$\frac{1}{4}x^2 + 1 > 0$ *dla każdego* $x \in R$*, więc* $|PP_x| = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right| = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

Wyznaczam odległość punktu P od punktu F:

$$|PF| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 - 2\right)^2}$$

$$|PF| = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1}$$

$$|PF| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right| = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

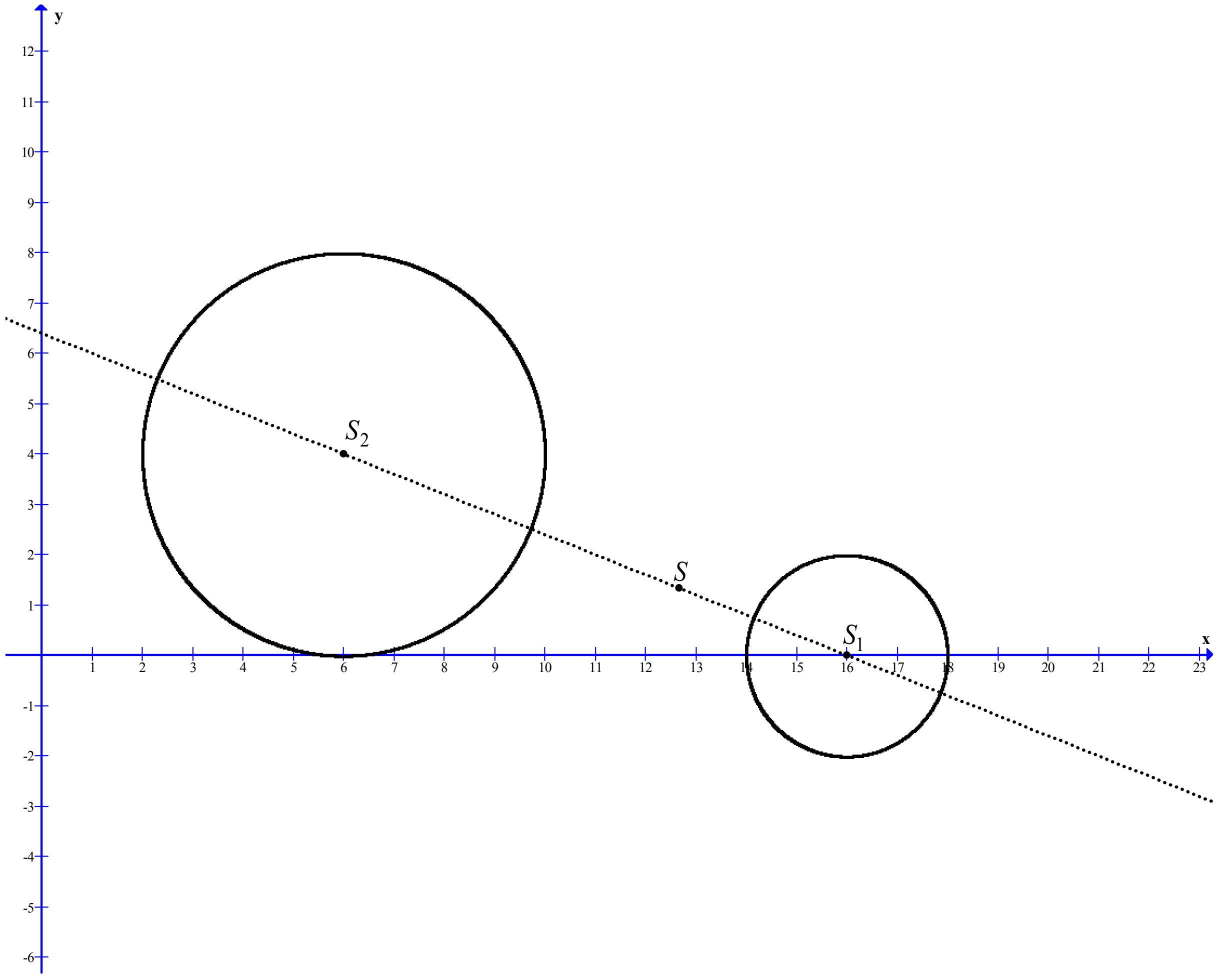
Zatem $|PP_x| = |PF|$.

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu $(x-16)^2+y^2=4$ jest okrąg o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

Środkiem okręgu $(x-16)^2+y^2=4$ *jest punkt* $S_1=(16,0)$, *a promień* $r_1=2$.

Środkiem okręgu $(x-6)^2+(y-4)^2=16$ *jest punkt* $S_2=(6,4)$, *a promień* $r_2=4$.



Na płaszczyźnie każde dwa okręgi są jednokładne. W tym przypadku stosunek długości promieni danych okręgów jest równy 2, więc szukam punktu $S=(x,y)$, *który jest środkiem jednokładności o skali* (-2).

Z własności jednokładności wynika równanie: $\overrightarrow{SS_2}=-2\cdot\overrightarrow{SS_1}$,

$$\overrightarrow{SS_2}=[6-x,4-y],\qquad \overrightarrow{SS_1}=[16-x,-y]$$

$$[6-x,4-y]=-2\cdot[16-x,-y]$$

$$[6-x,4-y]=[-32+2x,2y]$$

Obliczam odciętą punktu S: $6 - x = -32 + 2x$, *stąd* $x = \frac{38}{3}$.

Obliczam rzędną punktu S: $4 - y = 2y$, *stąd* $y = \frac{4}{3}$.

Odp. Środkiem jednokładności jest punkt $S = \left(\frac{38}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Zadanie 9. ***(4 pkt)***

Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f\left(x\right)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(8x-x^2\right)$.

Korzystam z faktu, że funkcja logarytmiczna dla podstawy równej $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *jest malejąca. Oznacza to, że funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla największego argumentu.*

Wyznaczam dziedzinę funkcji f:

$$8x-x^2>0$$

$$x\cdot\left(8-x\right)>0$$

$$x\in\left(0,8\right)$$

Wyrażenie $8x-x^2$ *osiąga największą wartość dla* $x=4$ *i jest ona równa 16.*

Najmniejszą wartością funkcji $f\left(x\right)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(8x-x^2\right)$ *jest liczba* $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(16\right)$.

Obliczam wartość funkcji f dla argumentu 16, korzystając z definicji logarytmu:

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(16\right)=y$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^y=16$$

$$\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^y=2^4$$

$$\frac{-y}{2}=4,\ \textit{więc}\ y=-8$$

Odpowiedź: *Liczba* $\left(-8\right)$ *jest najmniejszą wartością funkcji f.*

Zadanie 10. *(4 pkt)*

Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdą się tylko kobiety jest równe 0,1. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Oznaczam: *n – liczba kobiet, 2n – liczba mężczyzn i* $n \geq 2$.

Zdarzeniem elementarnym jest każdy dwuelementowy podzbiór zbioru 3n - elementowego.

Wyznaczam moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω:

$$|\Omega| = \binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}.$$

A – zdarzenie polegające na tym, że w delegacji znajdują się tylko kobiety.

Wyznaczam liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A:

$$|A| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{n-1}{3(3n-1)}.$$

Zapisuję równanie wynikające z warunków zadania :

$$\frac{n-1}{3(3n-1)} = \frac{1}{10}$$

$$10n - 10 = 9n - 3$$

$$n = 7$$

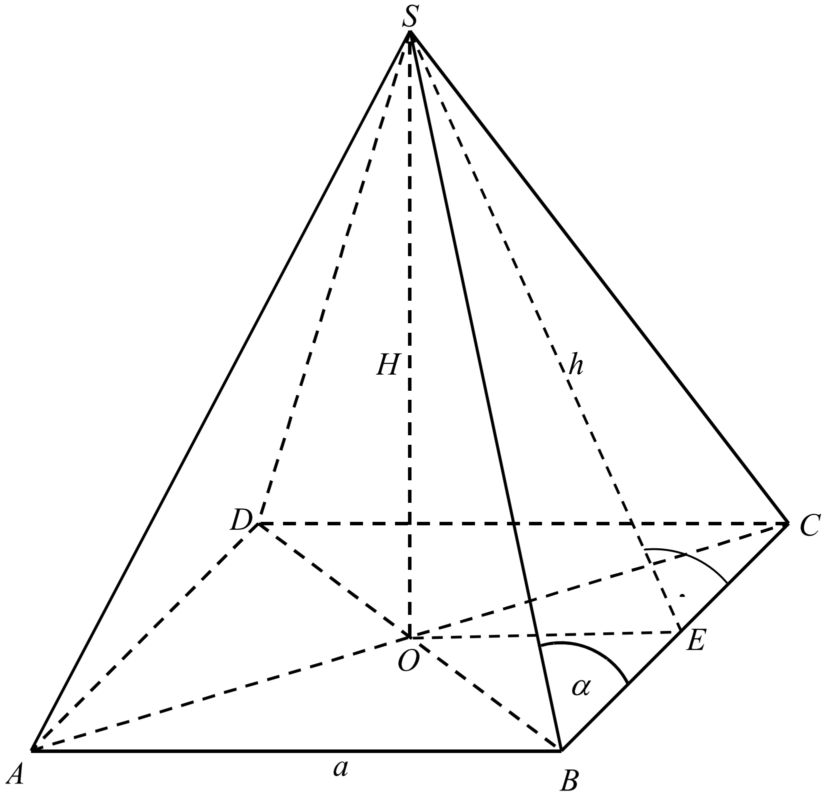
Odpowiedź: *W grupie jest 7 kobiet i 14 mężczyzn.*

Zadanie 11. *(5 pkt)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$).

a) Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1}$.

b) Oblicz miarę kąta α, dla której objętość V danego ostrosłupa jest równa $\frac{2}{9}H^3$. Wynik podaj w zaokrągleniu do całkowitej liczby stopni.



Wprowadzam oznaczenia:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

a) *Z trójkąta prostokątnego BES wyznaczam h*: $\frac{h}{\frac{a}{2}} = \mathrm{tg}\alpha$, *stąd* $h = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}\alpha$.

Stosuję twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym SOE i otrzymuję:

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2.$$

Podstawiam wyrażenie $\frac{a}{2} \cdot tg\alpha$ *w miejsce h, otrzymuję* $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\mathrm{tg}\alpha\right)^2$.

Wyznaczam a^2:

$$H^2+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}\cdot \mathrm{tg}^2\alpha,\quad H^2=\frac{a^2}{4}\cdot\left(\mathrm{tg}^2\alpha-1\right),\quad a^2=\frac{4H^2}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}.$$

Obliczam objętość ostrosłupa:

podstawiam do wzoru $V=\frac{1}{3}a^2H$ *wyznaczoną wartość* $a^2=\frac{4H^2}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$;

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{4H^2}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}\cdot H=\frac{4}{3}\cdot\frac{H^3}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$ *– co należało wykazać.*

Zapisuję równanie: $\frac{2}{9}\cdot H^3=\frac{4}{3}\cdot\frac{H^3}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$.

Mnożę obie jego strony przez $\frac{9}{2\cdot H^3}$ *i otrzymuję równanie*: $1=\frac{6}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$.

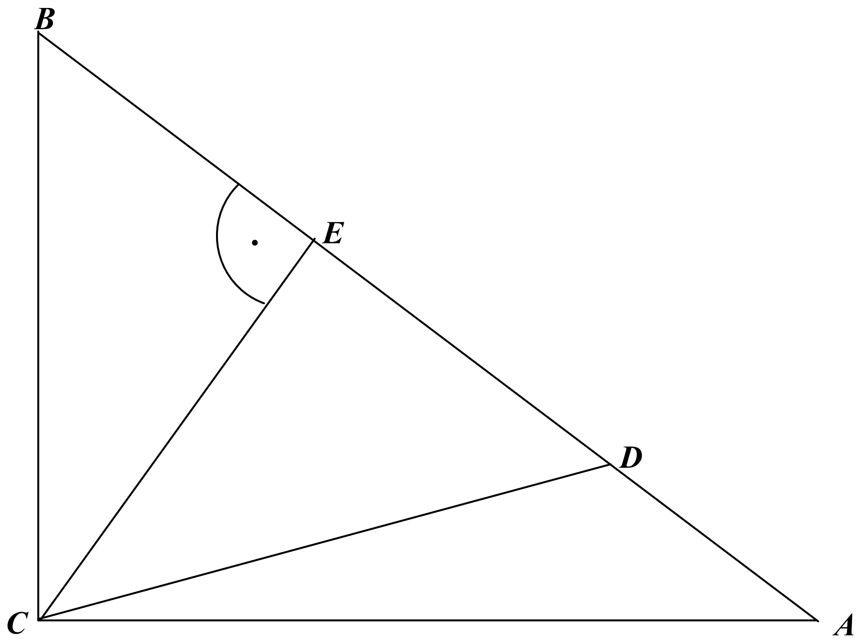
Stąd $\mathrm{tg}^2\alpha=7$ *czyli* $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{7}$ *(odrzucam równość* $\mathrm{tg}\alpha=-\sqrt{7}$*, bo* α *jest kątem ostrym).*

$\sqrt{7}\approx 2,6458$

Z tablic funkcji trygonometrycznych odczytuję szukaną miarę kąta α: $\alpha=69^\circ$.

Zadanie 12. *(4 pkt)*

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $|BC| = 9$, $|CA| = 12$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że odcinki BC i CD mają równe długości. Oblicz długość odcinka AD.



Rysuję wysokość CE poprowadzoną z wierzchołka C trójkąta ABC. Jest ona jednocześnie wysokością trójkąta równoramiennego BCD, co oznacza, że $|BE| = |DE|$.

Trójkąt BEC jest podobny do trójkąta ABC (oba trójkąty są prostokątne, kąt EBC jest ich kątem wspólnym).

Z podobieństwa trójkątów wynika proporcja $\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$.

Obliczam długość odcinka AB: $|AB| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ *i korzystając z wyznaczonej proporcji obliczam długość odcinka BE*: $|BE| = \frac{|BC|^2}{|AB|} = \frac{27}{5}$.

Wyznaczam długość odcinka AD: $|AD| = 15 - 2 \cdot \frac{27}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$.

Odpowiedź: *Odcinek AD ma długość równą* $4\frac{1}{5}$.

BRUDNOPIS