



**CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA**

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

MAJ 2016

Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–3)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.b).
--	---

Przykładowe rozwiązanie

Stosujemy wzory na zamianę podstaw logarytmu zapisujemy liczbę $\log_{\sqrt{2}} 49$ w postaci

$$\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{\log_7 49}{\log_7 \sqrt{2}} \text{ i wykonujemy kolejne przekształcenia: } \log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}.$$

Zauważamy, że jeżeli $\log_7 4 = a$ to $\log_7 4 = \log_7 (\sqrt{2})^4 = 4 \log_7 \sqrt{2} = a$.

$$\text{Zatem } \log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}.$$

$$\text{Stąd wynika, że } \log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\frac{a}{4}} = \frac{8}{a}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 p.

Zdający:

- zastosuje twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu, na przykład zapisze szukaną liczbę w postaci: $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}$ lub $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{4}{\log_7 2}$

albo

- wyznaczy liczbę $\log_7 \sqrt{2}$ w zależności od a : $\log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}$ lub liczbę $\log_7 2$

$$\text{w zależności od } a: \log_7 2 = \frac{a}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zastosuje twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu, na przykład zapisze szukaną

$$\text{liczbę w postaci: } \log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}} \text{ lub } \log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{4}{\log_7 2} \text{ oraz wyznaczy liczbę } \log_7 \sqrt{2}$$

$$\text{w zależności od } a: \log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4} \text{ lub liczbę } \log_7 2 \text{ w zależności od } a: \log_7 2 = \frac{a}{2}.$$

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający wyznaczy liczbę $\log_{\sqrt{2}} 49 : \frac{8}{a}$.

Zadanie 2. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$, stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R2.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (R3.c).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wielomian $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$ jest podzielny przez dwumiany $x + 3$ i $x - 4$, zatem

$$\begin{cases} W(-3) = 0 \\ W(4) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

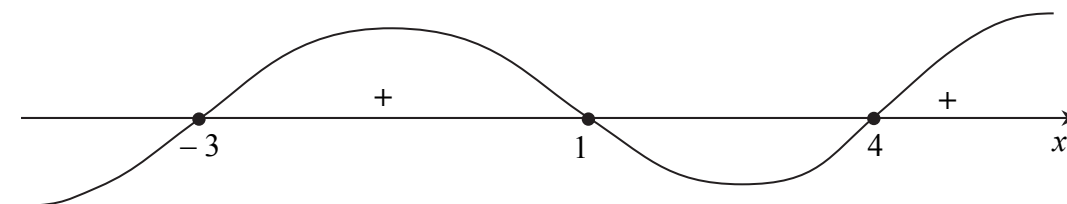
$$\begin{cases} 2 \cdot (-3)^3 + m \cdot (-3)^2 - 22 \cdot (-3) + n = 0 \\ 2 \cdot 4^3 + m \cdot 4^2 - 22 \cdot 4 + n = 0 \\ 2 \cdot (-27) + 9m + 66 + n = 0 \\ 2 \cdot 64 + 16m - 88 + n = 0 \\ 9m + n = -12 \\ 16m + n = -40 \\ m = -4 \\ n = 24 \end{cases}$$

Zatem wielomian W ma postać $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$.

Rozwiązujemy nierówność $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 \geq 0$.

Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $x + 3$ otrzymujemy iloraz $2x^2 - 10x + 8$, który dzielimy przez dwumian $x - 4$ i otrzymujemy iloraz $2x - 2$. W rezultacie wielomian W możemy zapisać w postaci $W(x) = 2(x + 3)(x - 1)(x - 4)$. Pierwiastkami wielomianu W są liczby: -3 , 1 , 4 .

Szkicujemy wykres wielomianu W , z którego odczytujemy rozwiązanie nierówności.



Zatem rozwiązaniem nierówności $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$ jest każda liczba rzeczywista $x \in \langle -3, 1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$.

II sposób

Wielomian $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$ jest podzielny przez dwumiany $x + 3$ i $x - 4$, więc jest podzielny przez wielomian $x^2 - x - 12$.

Wykonujemy dzielenie $(2x^3 + mx^2 - 22x + n) : (x^2 - x - 12)$, otrzymujemy iloraz $2x + m + 2$ oraz resztę $(4 + m)x + 12m + n + 24$.

Wobec wspomnianej wyżej podzielności mamy $(4 + m)x + 12m + n + 24 = 0$ dla każdego $x \in R$. Oznacza to, że spełniony musi być układ równań:

$$\begin{cases} 4 + m = 0 \\ 12m + n + 24 = 0, \end{cases}$$

skąd otrzymamy

$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24. \end{cases}$$

Dalsze rozumowanie jak w sposobie I rozwiązania.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze układ równań, wynikający z podzielności wielomianu $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$ przez

- dwumiany $x + 3$ i $x - 4$: $\begin{cases} W(-3) = 0 \\ W(4) = 0. \end{cases}$

albo

- $x^2 - x - 12$: $\begin{cases} 4 + m = 0 \\ 12m + n + 24 = 0. \end{cases}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy współczynniki m i n : $m = -4$, $n = 24$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający wyznaczy trzeci pierwiastek wielomianu $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$: $x = 1$ i zapisze wielomian w postaci iloczynowej: $W(x) = 2(x + 3)(x - 1)(x - 4)$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)4 p.

Zdający naszkicuje wykres wielomianu $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$.

Rozwiązanie pełne5 p.

Zdający wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 \geq 0$:

$$\langle -3, 1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle.$$

Zadanie 3. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.e).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając z „jedynki trygonometrycznej”, sprowadzamy równanie

$$-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0.$$

do równania z jedną funkcją trygonometryczną:

$$-2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x + 3 = 0,$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0.$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą, np. $\sin x = t$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t :

$$2t^2 + 3t + 1 = 0.$$

Rozwiązaniem równania są liczby $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Powracając do podstawienia, otrzymujemy: $\sin x = -1$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$, a stąd dane równanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ ma rozwiązania:

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający przekształci równanie $-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$ do równania z jedną funkcją trygonometryczną np. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$: $\sin x = -1$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający rozwiąże równanie $\sin x = -1$: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ lub równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$:

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający rozwiąże oba równania: $\sin x = -1$ oraz $\sin x = -\frac{1}{2}$ uwzględniając podany przedział:

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi.$$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z błędem, ale otrzyma dwa różne pierwiastki należące do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z błędem, ale otrzyma dwa różne pierwiastki i tylko jeden z nich należy do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 4. (0–6)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny, stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym. (5.b,c).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego. Jeżeli drugi wyraz tego ciągu jest równy 4, to $a = 4 - r$, $b = 4 + r$ i $c = 4 + 2r$.

Przy tych oznaczeniach, ciąg geometryczny $(a, a + b, 4c)$ możemy zapisać następująco $(4 - r, 8, 16 + 8r)$. Stąd otrzymujemy równanie

$$64 = (4 - r)(16 + 8r).$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie $8r(r - 2) = 0$. Rozwiązaniem tego równania są liczby $r = 0$ oraz $r = 2$.

Dla $r = 0$ otrzymujemy $a = b = c = 4$.

Dla $r = 2$ otrzymujemy $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$.

Uwaga:

W rozwiązaniu można zapisać pierwszy i czwarty wyraz ciągu w zależności od trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Jeżeli $a = 8 - b$ oraz $c = 2b - 4$, to ciąg geometryczny ma postać $(8 - b, 8, 2b - 4)$.

Wykorzystując własność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64 = (8 - b)(8b - 16).$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby $b = 4$ oraz $b = 6$.

Gdy $b = 4$, to $a = 4$ i $c = 4$.

Gdy $b = 6$, to $a = 2$ i $c = 8$.

Możemy też zapisać trzeci i czwarty wyraz ciągu w zależności od pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Jeżeli $b = 8 - a$ oraz $c = 12 - 2a$, to ciąg geometryczny ma postać $(a, 8, 48 - 8a)$.

Wykorzystując własność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64 = a(48 - 8a).$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby $a = 2$ oraz $a = 4$.

Gdy $a = 2$, to $b = 6$ i $c = 8$.

Gdy $a = 4$, to $b = 4$ i $c = 4$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i wprowadzi oznaczenia, np.:

$$a = 4 - r, b = 4 + r \text{ i } c = 4 + 2r$$

lub

$$a = 8 - b \text{ oraz } c = 2b - 4,$$

lub

$$b = 8 - a \text{ oraz } c = 12 - 2a.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.

Zdający zapisze wyrazy ciągu geometrycznego z użyciem jednej niewiadomej, np.: $(4 - r, 8, 16 + 8r)$ lub $(8 - b, 8, 2b - 4)$, lub $(a, 8, 48 - 8a)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający wykorzysta własności ciągu geometrycznego i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $64 = (4 - r)(16 + 8r)$ lub $64 = (8 - b)(8b - 16)$, lub $64 = a(48 - 8a)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania i dodatkowy postęp na drodze do pełnego rozwiązania 4 p.

Zdający obliczy różnicę ciągu arytmetycznego w przynajmniej jednym przypadku lub wyznaczy jedną z liczb spośród a, b, c i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie do końca z błędami rachunkowymi, które nie przekreślają poprawności rozwiązania 5 p.

Zdający obliczy a, b i c

- tylko w jednym przypadku

$$a = 4 - r, b = 4 + r \text{ i } c = 4 + 2r$$

albo

- w dwóch przypadkach z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy a, b, c w obu przypadkach:

$$a = b = c = 4 \text{ lub } a = 2, b = 6, c = 8.$$

Uwagi:

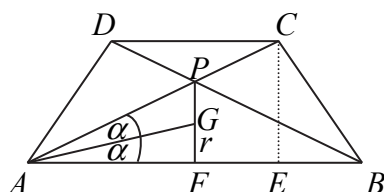
1. Jeżeli zdający tylko poda odpowiedź: $a = b = c = 4$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poda: $a = b = c = 4$ lub $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$ i sprawdzi, że odpowiednie ciągi spełniają warunki zadania, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, a ciąg geometryczny: 2, 8, 32, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, albo 4, 4, 4, 4, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 5. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu oraz znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (R7.a, 7.c).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Wprowadzamy oznaczenia: $|\angle FAP| = 2\alpha$, $|FG| = r$.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84 + 36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84 - 36}{2} = 24.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie BEC , obliczamy wysokość CE trapezu

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600 - 576} = 32.$$

$$\text{W trójkącie } AEC \text{ mamy } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}.$$

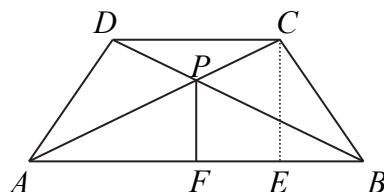
Korzystając ze wzoru na tangens podwojonego kąta, obliczamy kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{8}{15}, \\ 15\operatorname{tg} \alpha &= 4 - 4\operatorname{tg}^2 \alpha, \\ 4\operatorname{tg}^2 \alpha + 15\operatorname{tg} \alpha - 4 &= 0, \\ \Delta &= 289, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{-15 + 17}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo α jest kątem ostrym.
Obliczamy promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABP :

$$r = |AF| \cdot \operatorname{tg} \alpha = 42 \cdot \frac{1}{4} = 10,5.$$

II sposób



W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84 + 36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84 - 36}{2} = 24.$$

Ponadto $|AF| = |FB| = 42$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie BEC obliczamy wysokość CE trapezu

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600 - 576} = 32.$$

Korzystając z podobieństwa trójkątów AFP i AEC , obliczamy wysokość PF trójkąta ABP .
Mamy

$$\frac{|PF|}{|AF|} = \frac{|CE|}{|AE|},$$

$$\text{stąd } |PF| = \frac{42 \cdot 32}{60} = 22,4.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFP obliczamy długość odcinka AP :

$$|AP| = \sqrt{42^2 + (22,4)^2} = 47,6.$$

Następnie obliczamy pole trójkąta ABP i połowę jego obwodu:

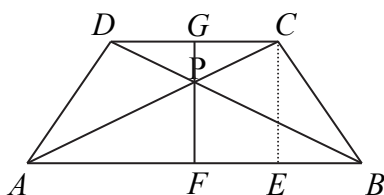
$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 22,4 = 940,8$$

$$p = \frac{47,6 + 47,6 + 84}{2} = 89,6.$$

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta w zależności od promienia okręgu wpisanego w trójkąt obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt ABP :

$$r = \frac{P_{ABP}}{p} = \frac{940,8}{89,6} = 10,5.$$

III sposób



Trójkąty ABP i CDP są podobne w skali $k = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{7}{3}$, stąd $\frac{|PF|}{|PG|} = \frac{7x}{3x}$

W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84 + 36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84 - 36}{2} = 24.$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie BEC i obliczamy wysokość CE trapezu:

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600 - 576} = 32.$$

Ponieważ $|PF| + |PG| = |CE|$, więc $7x + 3x = 32$, stąd $x = 3,2$.

Zatem $|PF| = 7x = 22,4$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFP obliczamy długość odcinka AP :

$$|AP| = \sqrt{42^2 + (22,4)^2} = 47,6.$$

W trójkąt ABP wpisujemy okrąg o środku w punkcie O i promieniu KO , gdzie K jest punktem styczności okręgu z bokiem AP trójkąta. Zauważamy, że trójkąt PKO jest podobny do trójkąta AFP (cecha kkk).

Niech $|KO| = |OF| = r$, stąd $\frac{|KO|}{|PF| - |OF|} = \frac{|AF|}{|AP|}$.

Zatem $\frac{r}{22,4 - r} = \frac{42}{47,6}$ i stąd $r = 10,5$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający obliczy wysokość trapezu $|CE| = 32$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy

- tangens kąta pomiędzy przekątną AC i podstawą AB trapezu: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{8}{15}$

albo

- długość odcinka AP lub PF : $|AP| = 47,6$, $|PF| = 22,4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp i w którym przedstawiono początek rozumowania prowadzącego do pokonania zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- obliczy pole trójkąta ABP , ale nie obliczy jego obwodu

albo

- nie obliczy pola trójkąta ABP , ale obliczy jego obwód,

albo

- uzasadni podobieństwo trójkątów PKO i AFP , ale nie zapisze poprawnie równania, z którego można wyznaczyć r .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający

- zapisze równanie, z którego można obliczyć tangens połowy kąta pomiędzy przekątną AC i podstawą AB trapezu: $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{8}{15}$

albo

- obliczy pole trójkąta ABP i jego obwód: $P_{ABP} = 940,8$, $O = 179,2$,

albo

- zauważy podobieństwo trójkątów PKO i AFP i zapisze równanie, z którego można wyznaczyć r , np. $\frac{r}{22,4-r} = \frac{42}{47,6}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 p.

Zdający obliczy

- tangens połowy kąta pomiędzy przekątną AC i podstawą AB trapezu: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$

albo

- promień okręgu z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy promień okręgu $r = 10,5$.

Zadanie 6. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym, bada równoległość i prostotałość prostych na podstawie ich równań kierunkowych, interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.b, c, d).
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Wyznaczamy równanie prostej AB , korzystając ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty: $(y-1)(6-1)-(2-1)(x-1)=0$.

$$\begin{aligned}5(y-1)-(x-1) &= 0, \\5(y-1) &= x-1.\end{aligned}$$

Zatem prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej AB , przechodzącej przez punkt M :

$$y = -5x + 18.$$

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (1, 1)$ i $M = (3, 3)$:

$$\begin{aligned}(y-1)(3-1)-(3-1)(x-1) &= 0, \\2(y-1)-2(x-1) &= 0.\end{aligned}$$

Zatem prosta AM ma równanie $y = x$.

Współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $a_2 = -1$ i do prostej należy punkt B , więc równanie prostej ma postać $y = -x + 8$.

Punkt $C = (x, y)$ jest punktem wspólnym prostych CM i BC , więc jego współrzędne wyznaczamy, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = -5x + 18 \\ y = -x + 8 \end{cases}$.

Zatem punkt C ma współrzędne $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Wyznaczamy pole trójkąta ABC . Można to zrobić różnymi metodami.

I metoda wyznaczania pola trójkąta ABC

Obliczamy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{(6-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$.

Wyznaczamy odległość h punktu C od prostej AB .

$$h = \frac{\left|\frac{5}{2} - 5 \cdot \frac{11}{2} + 4\right|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{26}}$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC : $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{21}{\sqrt{26}} = \frac{21}{2} = 10,5$.

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe $P = 10,5$.

II metoda wyznaczania pola trójkąta ABC

Wyznaczamy pole trójkąta ABC , korzystając ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $A = (1, 1)$ i $B = (6, 2)$ i $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

$$P = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| = \frac{1}{2} |(6-1)\left(\frac{11}{2}-1\right) - (2-1)\left(\frac{5}{2}-1\right)|,$$

$$P = \frac{1}{2} |22,5 - 1,5| = 10,5.$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe $P = 10,5$.

III metoda wyznaczania pola trójkąta ABC

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = [5, 1]$ i $\overrightarrow{AC} = \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$.

Wyznaczamy pole trójkąta ABC , korzystając ze wzoru

$$P = \frac{1}{2} |d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1,5 & 4,5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (22,5 - 1,5) = 10,5$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe $P = 10,5$.

II sposób

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (1, 1)$ i $M = (3, 3)$:

$$\begin{aligned} (y-1)(3-1) - (3-1)(x-1) &= 0, \\ 2(y-1) - 2(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

Zatem prosta AM ma równanie $y = x$.

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $B = (6, 2)$ i $M = (3, 3)$:

$$\begin{aligned} (y-2)(3-6) - (3-2)(x-6) &= 0, \\ -3(y-2) - (x-6) &= 0. \end{aligned}$$

Zatem prosta BM ma równanie $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

Wyznaczamy równania prostych, zawierających boki AC i BC trójkąta, które są prostopadłe odpowiednio do prostych: BM i AM .

Współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $a_1 = 3$ i do prostej należy punkt A , więc równanie prostej ma postać $y = 3x - 2$.

Współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $a_2 = -1$ i do prostej należy punkt B , więc równanie prostej ma postać $y = -x + 8$.

Punkt $C = (x, y)$ jest punktem wspólnym prostych AC i BC , więc jego współrzędne

$$\begin{aligned} \text{wyznaczamy, rozwiązując układ równań } \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -x + 8 \end{cases} \\ 3x - 2 = -x + 8, \\ x = 2,5, \\ y = 5,5. \end{aligned}$$

Zatem punkt C ma współrzędne $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Wyznaczamy pole trójkąta ABC jak w I sposobie rozwiązania.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający

- wyznaczy równanie prostej AB : $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

albo

- wyznaczy równanie prostej AM : $y = x$,

albo

- wyznaczy równanie prostej BM : $y = -\frac{1}{3}x + 4$,

albo

- obliczy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{26}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.

Zdający

- wyznaczy równania prostych AB : $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$ i AM : $y = x$

albo

- wyznaczy równania prostych AM : $y = x$ i BM : $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp i w którym przedstawiono początek rozumowania prowadzącego do pokonania zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający wyznaczy równania prostych zawierających boki AC i BC i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 4 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 p.

Zdający

- wyznaczy odległość h punktu C od prostej AB : $h = \frac{21}{\sqrt{26}}$ i na tym zakończy

albo

- popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający wyznaczy pole trójkąta ABC : $P = 10,5$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający wyznaczy równania prostych zawierających boki AC i BC i na tym poprzestanie, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy długość $|AB|$ i wyznaczy równanie prostej AB , to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 7. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Ponieważ liczba a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, więc $a = 6k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.

Ponieważ liczba b przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, więc $b = 6l + 5$, gdzie l jest liczbą całkowitą nieujemną.

$$\text{Wtedy } a^2 - b^2 = (6k + 1)^2 - (6l + 5)^2 = (6k + 6l + 6)(6k - 6l - 4) = 12(k + l + 1)(3k - 3l - 2).$$

Wykazaliśmy, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $k + l + 1$ lub $3k - 3l - 2$ jest podzielna przez 2.

Jeśli liczby całkowite k i l są jednakowej parzystości, to liczba $k - l$ jest parzysta oraz liczba $3k - 3l - 2 = 3(k - l) - 2$ jest parzysta, jako różnica dwóch liczb parzystych.

Jeśli liczby całkowite k i l są różnej parzystości, to liczba $k + l + 1$ jest parzysta, jako suma dwóch liczb nieparzystych i jednej parzystej. To kończy dowód.

II sposób

Ponieważ liczba a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, więc $a = 6k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.

Ponieważ liczba b przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, więc $b = 6l - 1$, gdzie l jest liczbą całkowitą nieujemną.

$$\text{Wtedy } a^2 - b^2 = (6k + 1)^2 - (6l - 1)^2 = (6k + 6l)(6k - 6l + 2) = 12(k + l)(3k - 3l + 1).$$

Wykazaliśmy, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $k + l$ lub $3k - 3l + 1$ jest podzielna przez 2.

Jeśli liczby całkowite k i l są jednakowej parzystości, to liczba $k + l$ jest parzysta.

Jeśli liczby całkowite k i l są różnej parzystości, to liczba $k - l$ jest nieparzysta, więc liczba $3k - 3l + 1 = 3(k - l) + 1$ jest parzysta. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 p.

Zdający zapisze liczbę $a^2 - b^2$ w postaci $12(k + l + 1)(3k - 3l - 2)$ lub w postaci $12(k + l)(3k - 3l + 1)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający

- uzasadni parzystość jednej z liczb $k+l+1$ lub $3k-3l-2$ w jednym z przypadków w zależności od parzystości liczb k i l

albo

- uzasadni parzystość jednej z liczb $k+l$ lub $3k-3l+1$ w jednym z przypadków w zależności od parzystości liczb k i l .

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający uzasadni podzielność liczby $a^2 - b^2$ przez 24.

Uwaga:

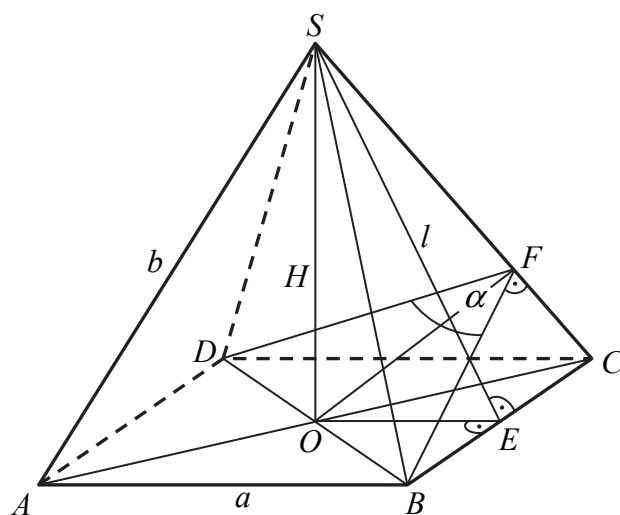
Jeżeli zdający rozważa tylko szczególne przypadki, np. przyjmie $a = 6k + 1$ oraz $b = 6k + 5$ i wyznaczy $a^2 - b^2 = (6k + 1)^2 - (6k + 5)^2 = 24(-2k - 1)$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 8. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanie

Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. Każdy z nich różni się zestawem i kolejnością zastosowanych związków między odcinkami w ostrosłupie. Przyjmijmy następujące oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|OE| = \frac{a}{2}$, $|\angle BFO| = 60^\circ$.

Ponieważ trójkąt BFO jest prostokątny, stąd $\frac{|BO|}{|BF|} = \sin 60^\circ$.

Zatem

$$|BF| = \frac{|BO|}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trójkąty SEC i BFC są podobne, stąd $\frac{|SE|}{|SC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$, czyli $\frac{l}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}$. Zatem $l = \frac{b\sqrt{6}}{3}$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych EOS i BOS , skąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ 25 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2}{3} \\ 25 + \frac{a^2}{2} = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300 + 3a^2 = 8b^2 \\ 50 + a^2 = 2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 75 \\ a^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5\sqrt{3} \\ a = 10 \end{cases}$$

Stąd pole P podstawy $ABCD$ ostrosłupa jest równe $P = a^2 = 100$, więc objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = \frac{500}{3}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SOC

albo

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SOE ,

albo

- zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie BFD ,

albo

- zapisze funkcję trygonometryczną kąta ostrego w trójkącie OBF ,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów SEC i BCF ,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów SOC i OFC

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisze związki, z których można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, ale pominie jedno równanie potrzebne do zakończenia obliczeń, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 3 p.

Zdający zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą oznaczającą wielkość, która pozwala obliczyć pole podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, popełniając błędy rachunkowe i konsekwentnie do tego obliczy objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{500}{3}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup, którego podstawą nie jest kwadrat albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi, ale przy korzystaniu z własności figur, w których ten kąt nie występuje, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający odczyta wartość $\sin \sphericalangle BFO = \sin 60^\circ$ z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

Zadanie 9. (0–3)V. Rozumowanie
i argumentacja.

7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (7.c).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, niech ponadto r_s oznacza promień okręgu o środku w punkcie S i średnicy AB .

Wtedy $|AB| = 2(|AK| + |LB|)$ oraz $r_s = |AS| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|KS| = \frac{1}{4}|AB| = \frac{1}{2}r_s$.

Trójkąt KLM jest trójkątem równoramiennym, którego podstawą jest odcinek KL . Punkt S jest środkiem odcinka KL .

Zatem punkty K, S, M są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, w którym

$$|KS|^2 + |MS|^2 = |KM|^2 \text{ przy czym } |MS| = \frac{1}{2}|AB| - r = r_s - r$$

oraz

$$|KM| = \frac{1}{4}|AB| + r = \frac{1}{2}r_s + r,$$

Stąd mamy kolejno:

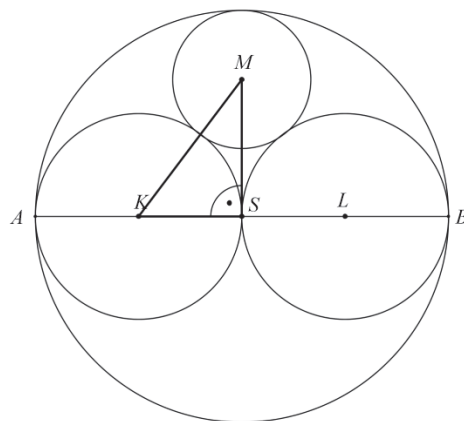
$$\left(\frac{1}{2}r_s\right)^2 + (r_s - r)^2 = \left(\frac{1}{2}r_s + r\right)^2,$$

$$\frac{1}{4}r_s^2 + r_s^2 - 2r_s \cdot r + r^2 = \frac{1}{4}r_s^2 + r_s \cdot r + r^2,$$

$$r_s^2 = 3r_s \cdot r.$$

Po wykorzystaniu zależności $\frac{1}{2}|AB| = r_s$ otrzymujemy: $\frac{3r}{\frac{1}{2}|AB|} = 1$.

Zatem $r = \frac{1}{6}|AB|$, co kończy dowód.

**Schemat punktowania**

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 p.

Zdający zauważy, że trójkąt KSM jest trójkątem prostokątnym i zapisze długości boków tego trójkąta

- w zależności od długości odcinka AB :

$$|KS| = \frac{1}{4}|AB|, |MS| = \frac{1}{2}|AB| - r, |KM| = \frac{1}{4}|AB| + r$$

albo

- w zależności od promienia r_s :

$$|KS| = \frac{1}{2}r_s, |MS| = r_s - r, |KM| = \frac{1}{2}r_s + r \text{ oraz } \frac{1}{2}|AB| = r_s.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta KSM ,

$$\text{np. } \left(\frac{1}{2}r_s\right)^2 + (r_s - r)^2 = \left(\frac{1}{2}r_s + r\right)^2,$$

i przekształci do postaci umożliwiającej wyznaczenie szukanej zależności np. $r_s^2 = 3r_s \cdot r$.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający wykaże, że $r = \frac{1}{6}|AB|$.

Zadanie 10. (0–5)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych oraz wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (R10, 10.d).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Obliczymy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{20}{3} = 1140$.

Zdarzenie A polega na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul są tego samego koloru.

Ustalamy moc zdarzenia A : $|A| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} + \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} + \binom{2}{2} \cdot \binom{18}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} = 978$.

Obliczamy szukane prawdopodobieństwo, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{978}{1140} = \frac{163}{190}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{20}{3}$

albo

- zapisze moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu przeciwnemu do A :

$$|A| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot 2 + \binom{2}{2} \cdot \binom{18}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} \cdot 2 \quad \text{lub} \quad |A'| = \binom{9}{1} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{2}{1},$$

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie dla danego zdarzenia A lub dla zdarzenia do niego przeciwnego A').

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.
Zdający

- zapisze moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{20}{3}$ i moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu przeciwnemu do A :
 $|A| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot 2 + \binom{2}{2} \cdot \binom{18}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} \cdot 2$ lub $|A'| = \binom{9}{1} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{2}{1}$
- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.
Zdający

- obliczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 1140$ i moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu przeciwnemu do A :
 $|A| = 978$ lub $|A'| = 162$

albo

- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi: np. $\frac{9}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{2}{18}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.
Zdający

- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A :
 $\frac{9}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{2}{18} \cdot 6 = \frac{81}{570}$ i nie obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A

albo

- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{489}{570}$.

Zadanie 11. (0–3)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Miejsce dla cyfry 1 wybieramy na $\binom{10}{3}$ sposobów. Na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfry 2 lub 3 w dowolnym porządku na 2^7 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy.

II sposób

Rozpatrzmy trzy rozłączne przypadki, w zależności od tego, jaka cyfra została zapisana na pierwszym miejscu.

1. Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 1, to miejsce dla pozostałych dwóch jedynek wybieramy na $\binom{9}{2}$ sposobów, na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^7 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2^7 = 36 \cdot 128 = 4608$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 1.

2. jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 2, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 2.

3. (rozumowanie analogiczne jak w p. 2.). Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 3, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów.

Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 3.

Sumujemy liczby powstałe w każdym z trzech przypadków i otrzymujemy:

$$4608 + 2 \cdot 5376 = 15360$$

liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

III sposób

Rozpatrzmy osiem rozłącznych przypadków, wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy:

1. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$,
2. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 1 dwójka i 6 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 6!} = 840$,
3. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 2 dwójki i 5 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} = 2520$,
4. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 3 dwójki i 4 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!} = 4200$,
5. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 4 dwójki i 3 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 3!} = 4200$,
6. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 5 dwójek i 2 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = 2520$,
7. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 6 dwójek i 1 trójka, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 6!} = 840$,
8. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 dwójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.

Sumujemy liczby otrzymane w każdym przypadku i otrzymujemy:

$$2 \cdot (120 + 840 + 2520 + 4200) = 2 \cdot 7680 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 p.

Zdający zapisze, że:

- miejsce dla cyfry 1 można wybrać na $\binom{10}{3}$ sposobów

albo

- miejsca dla cyfr 2 lub 3 można wybrać na $\binom{10}{7}$ sposobów,

albo

- cyfry 2 lub 3 można rozmieścić na 2^7 sposobów,

albo

- jeżeli cyfra 1 jest na ustalonym (np. pierwszym) miejscu, to pozostałe dwie cyfry 1 można rozmieścić na $\binom{9}{2}$ sposobów,

albo

- jeżeli na ustalonym miejscu stoi jedna z cyfr 2 lub 3, to trzy cyfry 1 można rozmieścić na $\binom{9}{3}$ sposobów,

lbo

- jeżeli cyfry 1 stoją na ustalonych trzech miejscach, to jeśli w liczbie występuje n cyfr 2, to cyfry 2 i 3 można rozmieścić na $\binom{7}{n}$ sposobów dla przynajmniej jednej konkretnej liczby n ,

albo

- jest 8 rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający

- zapisze, że liczba rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych jest równa np. $\binom{10}{3} \cdot 2^7$

albo

- zapisze, ile jest liczb w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy,

lbo

- zapisze osiem rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy oraz w przynajmniej jednym przypadku zapisze liczbę takich liczb, np. $\binom{10}{3} \cdot 1$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający

- zapisze, że jest $\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 15360$ liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

albo

- zsumuje liczby otrzymane w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy i zapisze, że jest ich 15360.

Uwagi:

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych bez użycia symbolu Newtona.
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przedstawia zapisy, dla których brak bezpośredniej interpretacji kombinatorycznej i zapisom tym nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to nie może otrzymać maksymalnej liczby punktów, przy czym za rozwiązanie, zawierające

- jedynie zapisy pojedynczych liczb lub symboli Newtona (typu 120, 128, $\binom{10}{7}$), bez stosownych objaśnień, zdający otrzymuje **0 punktów**, a za rozwiązanie, zawierające jedynie zapisy działań na liczbach (typu $120 \cdot 128 = 15\,360$), bez stosownych objaśnień zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przedstawia rozwiązanie, w którym części zapisanych liczb lub działań na liczbach nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to za takie rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Zdający może skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona i zapisać:

$$\binom{10}{3} \cdot \left\{ \binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2} + \binom{7}{1} + \binom{7}{0} \right\} = \binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360.$$