



**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-R1**

**MAJ 2017**

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

#### **Zadanie 1. (0–1)**

| <b>Wymagania ogólne</b>                            | <b>Wymagania szczegółowe</b>                                                                                                                                                                                                                                | <b>Poprawna odp. (1 p.)</b> |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).<br>1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3). | <b>A</b>                    |

#### **Zadanie 2. (0–1)**

|                                          |                                                                                                                                                        |          |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$ , $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów; (R5.2). | <b>D</b> |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

#### **Zadanie 3. (0–1)**

|                                   |                                                                                            |          |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; (7.1). | <b>C</b> |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

#### **Zadanie 4. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                |          |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach (R8.7). | <b>B</b> |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

#### **Zadanie 5. (0–2)**

|                                                    |                                                                                                                       |            |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4). | <b>125</b> |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|

**Zadanie 6. (0–3)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych oraz korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.2, R11.3).

**Przykładowe rozwiązanie**

Pochodna funkcji  $f$  jest równa

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x-1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} \text{ dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

Współczynnik kierunkowy szukanej stycznej jest równy:

$$f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

zatem równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P = (1, 0)$  ma postać:

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 0,$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wyznaczy pochodną funkcji  $f$ :

$$\text{np. } f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x-1)}{(x^2 + 1)^2} \text{ lub } f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy  $f'(1) = \frac{1}{2}$ , poprawnie interpretuje tę liczbę jako współczynnik kierunkowy stycznej i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy zapisze równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P = (1, 0)$ :  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający wyznacza błędnie pochodną funkcji, np.:  $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x-1)}{x^2 + 1}$

i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy równanie stycznej, to otrzymuje **1 punkt**.

### Zadanie 7. (0–3)

|                                |                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).<br>Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (R2.6). |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$x^2y^2 - 4xy + 4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 > 0,$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x^2 - 2xy + y^2) > 0,$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2 > 0.$$

Ponieważ  $x \neq y$ , więc  $(x - y)^2 > 0$ . Zatem lewa strona tej nierówności jest sumą liczby nieujemnej  $(xy - 2)^2$  oraz liczby dodatniej  $2(x - y)^2$ , a więc jest dodatnia.

To kończy dowód.

#### II sposób

Zapiszmy nierówność  $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$  w postaci równoważnej

$$(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0.$$

Ponieważ  $y^2 + 2 > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $y$ , więc możemy potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą  $x$  i parametrem  $y$  (lub z niewiadomą  $y$  i parametrem  $x$ ). Wystarczy więc wykazać, że wyróżnik trójmianu kwadratowego  $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$  zmiennej  $x$  jest ujemny.

$$\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot (y^2 + 2) \cdot (2y^2 + 4) = 64y^2 - 8(y^2 + 2)^2 =$$

$$= 8(8y^2 - y^4 - 4y^2 - 4) = 8(-y^4 + 4y^2 - 4) = -8(y^2 - 2)^2.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej  $y$ , takiej, że  $y^2 \neq 2$  wyróżnik jest ujemny. Gdy  $y^2 = 2$ , to wówczas nierówność  $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$  ma postać

$$4x^2 - 8\sqrt{2}x + 8 > 0 \text{ lub } 4x^2 + 8\sqrt{2}x + 8 > 0$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0 \text{ lub } x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 > 0,$$

$$(x - \sqrt{2})^2 > 0 \text{ lub } (x + \sqrt{2})^2 > 0.$$

Ponieważ z założenia wynika, że  $x \neq y$ , więc  $x^2 \neq 2$ , a to oznacza, że każda z otrzymanych nierówności jest prawdziwa.

To kończy dowód.

#### III sposób

Rozpatrzmy nierówność  $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$  w trzech przypadkach.

I. Gdy co najmniej jedna z liczb  $x$ ,  $y$  jest równa 0, np. gdy  $x = 0$ . Wtedy nierówność przyjmuje postać

$$2y^2 + 4 > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $y$ .

II. Gdy żadna z liczb  $x, y$  nie jest równa 0 i gdy  $xy < 0$ . Wtedy po lewej stronie nierówności  $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$  wszystkie składniki są dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa.

III. Gdy żadna z liczb  $x, y$  nie jest równa 0 i gdy  $xy > 0$ . Wtedy, dzieląc obie strony nierówności  $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$  przez  $xy$ , otrzymujemy nierówność równoważną

$$\begin{aligned}xy + 2\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} - 8 + \frac{4}{xy} &> 0, \\xy + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 8 &> 0, \\xy - 4 + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) &> 0, \\ \left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 &> 0.\end{aligned}$$

Ponieważ z założenia  $x \neq y$ , więc  $\frac{x}{y} \neq 1$ , zatem  $\frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$ , co oznacza, że  $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 > 0$ .

Stąd i z tego, że  $\left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 \geq 0$  wynika prawdziwość otrzymanej nierówności.

To kończy dowód.

#### IV sposób

I. Gdy  $xy \leq 0$ , to wtedy po lewej stronie nierówności  $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$  cztery pierwsze składniki są nieujemne, piąty jest dodatni, więc nierówność jest prawdziwa.

II. Gdy  $xy > 0$ , wtedy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich  $x^2y^2, 2x^2, 2y^2$  i 4 otrzymujemy

$$\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq \sqrt[4]{x^2y^2 \cdot 2x^2 \cdot 2y^2 \cdot 4} = \sqrt[4]{16x^4y^4} = 2xy,$$

skąd

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \geq 8xy.$$

Równość miałaby miejsce tylko wtedy, gdyby  $x^2y^2 = 2x^2 = 2y^2 = 4$ , a więc gdyby  $x^2 = y^2$ , co wobec nierówności  $xy > 0$  oznaczałoby  $x = y$ , co jest sprzeczne z założeniem. Zatem

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 > 8xy,$$

czyli

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

To kończy dowód.

## Schemat punktowania

### I sposób rozwiązania

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci  $(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2 > 0$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie, uwzględniające założenie, że  $x \neq y$ .

### II sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne ..... 1 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci  $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0$ , obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego  $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$ , np.:  $\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot (y^2 + 2) \cdot (2y^2 + 4)$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający uzasadni, że wyróżnik  $\Delta = -8(y^2 - 2)^2$  jest niedodatni dla każdej liczby rzeczywistej  $y$ , ale nie rozpatrzy przypadku, gdy  $y^2 = 2$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

### III sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne ..... 1 p.**

Zdający wykaże prawdziwość nierówności w I i w II przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci  $xy + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 8 > 0$  w przypadku, gdy  $xy > 0$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

### IV sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne ..... 1 p.**

Zdający wykaże prawdziwość nierówności  $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$  w I przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający uzasadni, że gdy  $xy > 0$ , to prawdziwa jest nierówność  $\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq 2xy$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

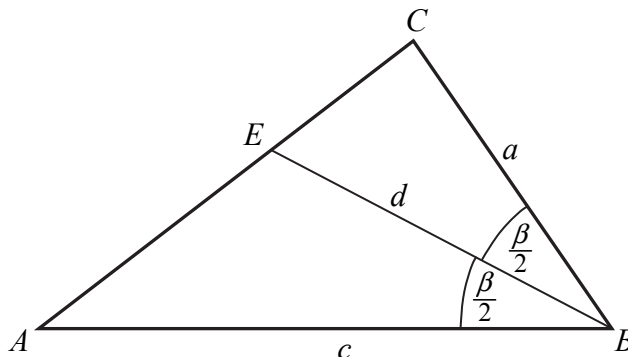
### Zadanie 8. (0–3)

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | <p>7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. (7.4).</p> <p>Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności. (R7.4).</p> <p>Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5).</p> |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta.$$

Pola trójkątów  $ABE$  i  $CBE$  są równe

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Suma pól trójkątów  $ABE$  i  $CBE$  jest równa polu trójkąta  $ABC$ , zatem

$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

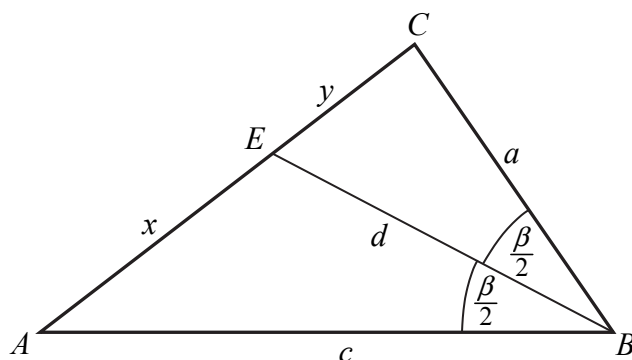
Stąd

$$\begin{aligned}a \cdot c \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} &= d \cdot (a + c) \cdot \sin \frac{\beta}{2} . \\2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2} &= d \cdot (a + c) , \\d &= \frac{2ac}{a + c} \cdot \cos \frac{\beta}{2} .\end{aligned}$$

To kończy dowód.

## II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x} = \frac{a}{c} .$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów  $ABE$  i  $CBE$  otrzymujemy

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2} \text{ oraz } y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2} .$$

Zatem

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}}{c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}} .$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}a^2 \left( c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2} \right) &= c^2 \left( a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2} \right) , \\a^2 c^2 + a^2 d^2 - 2a^2 cd \cos \frac{\beta}{2} &= a^2 c^2 + c^2 d^2 - 2ac^2 d \cos \frac{\beta}{2} , \\a^2 d^2 - c^2 d^2 &= 2a^2 cd \cos \frac{\beta}{2} - 2ac^2 d \cos \frac{\beta}{2} , \\(a^2 - c^2) d &= 2(a - c) ac \cos \frac{\beta}{2} .\end{aligned}$$

Gdy  $a = c$ , wówczas trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, więc trójkąty  $ABE$  i  $CBE$  są

prostokątne i przystające. Wtedy  $\cos \frac{\beta}{2} = \frac{d}{c}$ , skąd  $d = c \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2c^2}{2c} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{\beta}{2}$ .

Gdy zaś  $a \neq c$ , to  $(a - c)(a + c) \neq 0$ , czyli  $a^2 - c^2 \neq 0$ , więc

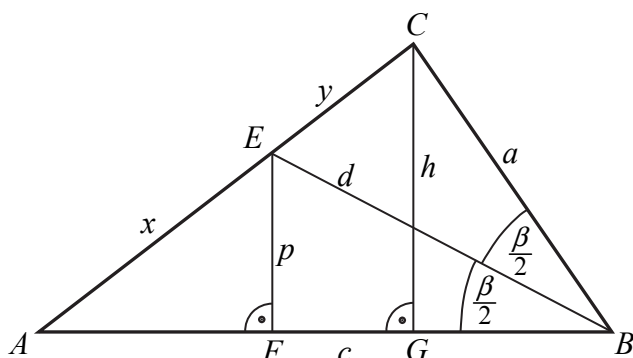
$$d = \frac{2(a - c)}{a^2 - c^2} ac \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a + c} \cos \frac{\beta}{2} .$$

To kończy dowód.



### III sposób

Poprowadźmy wysokości  $CG$  i  $EF$  trójkątów  $ABC$  i  $ABE$ . Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest ostrokątny, więc spodki  $F$  i  $G$  tych wysokości leżą na boku  $AB$  trójkąta  $ABC$ . Pozostałe oznaczenia przyjmijmy jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x} = \frac{a}{c}.$$

Z trójkątów  $BEF$  i  $BCG$  otrzymujemy

$$\frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } \frac{h}{a} = \sin \beta.$$

Stąd

$$p = d \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } h = a \sin \beta.$$

Trójkąty  $AFE$  i  $AGC$  są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $A$ . Zatem

$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|CG|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{p}{x} = \frac{h}{x+y}.$$

Stąd i z poprzednio otrzymanych równości otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \frac{\beta}{2}}{x} &= \frac{a \sin \beta}{x+y}, \\ d \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{a \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{y}{x}}, \\ d &= \frac{2a \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{a}{c}} = \frac{2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}. \end{aligned}$$

To kończy dowód.

## Schemat punktowania

### I sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze pola każdego z trójkątów  $ABC$ ,  $ABE$  i  $CBE$  w zależności od długości  $a$ ,  $c$ ,  $d$  i kąta  $\beta$ :  $P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$ ,  $P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2}$ ,  $P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$

albo

- zapisze, że pole trójkąta  $ABC$  jest sumą pól trójkątów  $ABE$  i  $CBE$  oraz zapisze jedno z tych pól:  $P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$  lub  $P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2}$  lub  $P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zapisze zależność między polem trójkąta  $ABC$  i polami trójkątów  $ABE$  i  $CBE$  w postaci, w której występują jedynie wielkości  $a$ ,  $c$ ,  $d$  i  $\beta$ , np.:

$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

### II sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 1 p.**

Zdający zapisze zależności między wielkościami  $x$ ,  $y$ ,  $d$ ,  $a$  i  $c$  oraz kątem  $\beta$ :

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \quad x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}, \quad y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zapisze równanie, np.:  $\frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}}{c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający nie rozważy sytuacji gdy  $a = c$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

### III sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 1 p.**

Zdający zapisze

- zależność między wielkościami  $x, y, a$  i  $c$  oraz zależności między wielkościami  $p, h$  i  $a$  oraz kątem  $\beta$ :  $\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2}, \frac{h}{a} = \sin \beta$

albo

- zależność między wielkościami  $x, y, a$  i  $c$  oraz zależności między wielkościami  $p, h, x$  i  $y$  oraz kątem  $\beta$ :  $\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{p}{x} = \frac{h}{x+y},$

albo

- zależność między wielkościami  $p, h$  i  $a$  oraz kątem  $\beta$  oraz zależność między wielkościami  $x, y, a$  i  $c$ :  $\frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2}, \frac{h}{a} = \sin \beta, \frac{y}{x} = \frac{a}{c}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zapisze wystarczającą liczbę zależności między wielkościami  $x, y, a, c, p$  i  $h$  oraz kątem  $\beta$ , pozwalającą wyznaczyć  $d$  w zależności od wielkości  $a, c$  i kąta  $\beta$ , np.:

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{d \sin \frac{\beta}{2}}{x} = \frac{a \sin \beta}{x+y}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze jedynie 3 razy twierdzenie cosinusów, to otrzymuje **0 punktów**.

### Zadanie 9. (0–4)

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. (R9.2).<br>7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4).<br>G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7). |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

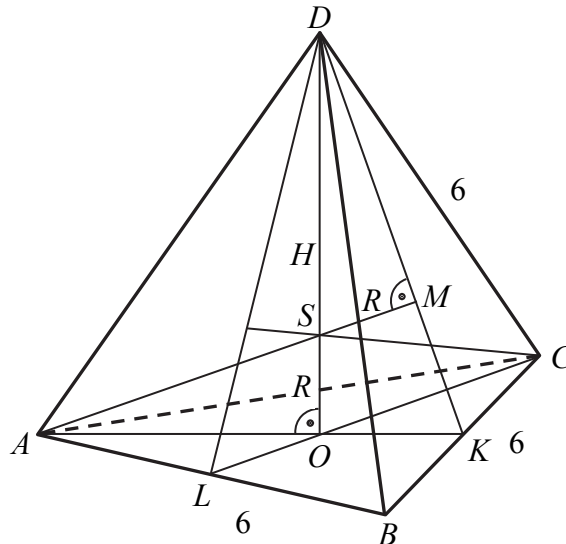
### Przykładowe rozwiązanie

Niech  $K$  będzie środkiem odcinka  $BC$ , a  $M$  i  $O$  spodkami wysokości trójkąta  $AKD$  opuszczonymi z wierzchołków  $A$  i  $D$ . Płaszczyzny  $AKD$  i  $ABC$  są prostopadłe, bo prosta  $BC$  jest prostopadła do płaszczyzny  $AKD$ .

Niech  $T$  będzie punktem wspólnym wysokości  $AM$  i  $DO$ . Odległości punktu  $T$  od prostych  $AK$  i  $DK$  są równe, bo  $|AK| = |DK|$ . Są to też odległości punktu  $T$  od płaszczyzn  $ABC$  i  $BCD$ . Ten sam punkt  $T$  otrzymamy rozpatrując trójkąt  $LCD$ , gdzie  $L$  jest środkiem odcinka  $AB$  lub

trójkąt  $LBD$ , gdzie  $L$  jest środkiem odcinka  $AC$ . Wynika stąd, że odległość punktu  $T$  od każdej ściany czworościanu  $ABCD$  jest taka sama. Wobec tego  $S = T$ .

Niech  $H$  oznacza wysokość czworościanu,  $h$  wysokość ściany czworościanu, a  $R$  – promień kuli, o której mowa w treści zadania. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Wyznamy wysokość  $H$  czworościanu.

Odcinki  $AK$  i  $DK$  to wysokości przystających trójkątów równobocznych  $ABC$  i  $BCD$  o boku długości 6, więc

$$|AK| = |DK| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Spodek  $O$  wysokości  $DO$  czworościanu jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ , więc

$$|KO| = \frac{1}{3}|AK| = \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $DOK$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} |DO|^2 + |KO|^2 &= |DK|^2, \\ H^2 + (\sqrt{3})^2 &= (3\sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} H^2 &= (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2, \\ H &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

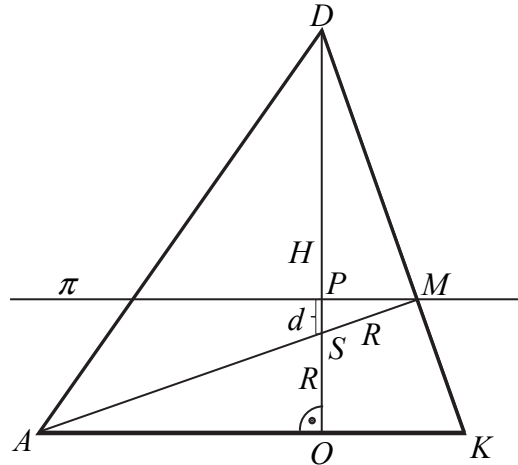
Wyznamy odległość  $d$  środka  $S$  kuli od płaszczyzny  $\pi$ .

### I sposób

Niech  $P$  będzie punktem, w którym wysokość  $DO$  przebija płaszczyznę  $\pi$ . Ponieważ płaszczyzna  $\pi$  jest równoległa do płaszczyzny ściany  $ABC$ , więc czworościan odcięty tą płaszczyzną od czworościanu  $ABCD$  jest podobny do czworościanu  $ABCD$ , a skala tego podobieństwa jest równa  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ . Wynika stąd, że płaszczyzna  $\pi$  przecina wysokość  $DK$  ściany bocznej  $BCD$  w takim punkcie  $M'$ , że

$$|DM'| = \frac{2}{3}|DK|.$$

To oznacza  $M' = M$ .



Trójkąty  $DOK$ ,  $DPM$ ,  $MPS$  są podobne, ponieważ para trójkątów prostokątnych  $DOK$ ,  $DPM$  ma jeden kąt ostry wspólny oraz para trójkątów prostokątnych  $DPM$ ,  $MPS$  ma jeden kąt ostry wspólny. Zatem

Stąd

$$\frac{|DP|}{|MP|} = \frac{|DO|}{|OK|} = \frac{|MP|}{|PS|}, \text{ czyli } \frac{\frac{2}{3}H}{|MP|} = \frac{H}{\sqrt{3}} = \frac{|MP|}{d}.$$

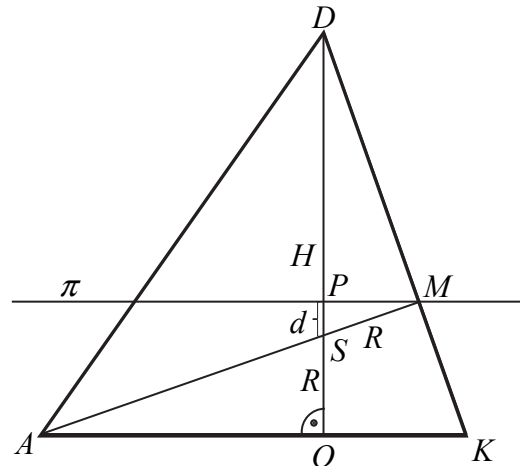
Stąd

$$|MP| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ oraz } \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{d}$$

$$\text{Zatem } d = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

## II sposób

Obliczymy najpierw promień  $R$  kuli.



Trójkąty  $DOK$  i  $DMS$  są podobne, ponieważ są prostokątne i mają jeden kąt ostry wspólny.

Zatem  $\frac{|SM|}{|DS|} = \frac{|KO|}{|DK|}$ . Stąd

$$\begin{aligned}\frac{R}{H-R} &= \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}, \\ 3R &= H-R, \\ 4R &= H \\ R &= \frac{1}{4}H.\end{aligned}$$

Ponieważ  $H = 2\sqrt{6}$ , więc

$$R = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Płaszczyzna  $\pi$  odcina czworościan podobny do czworościanu  $ABCD$  w skali  $\frac{2}{3}$ , więc

$$|DP| = \frac{2}{3}H, \text{ skąd } |OP| = \frac{1}{3}H = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Odległość punktu  $S$  od płaszczyzny  $\pi$  jest więc równa

$$d = \frac{1}{3}H - R = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

### Uwaga

Możemy najpierw wyznaczyć wielkości  $R$  i  $|OP|$  w zależności od  $H$ , potem wyznaczyć szukaną odległość  $d$  w zależności od  $H$ , a następnie obliczyć  $H$  i w rezultacie  $d$ :

$$R = \frac{1}{4}H, \quad |OP| = \frac{1}{3}H,$$

więc

$$d = \frac{1}{3}H - \frac{1}{4}H = \frac{1}{12}H = \frac{1}{12} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający:

- obliczy wysokość czworościanu  $ABCD$ :  $H = 2\sqrt{6}$

albo

- obliczy skalę  $s$  podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną  $\pi$  od czworościanu  $ABCD$  do czworościanu  $ABCD$ :  $s = \frac{2}{3}$ ,

albo

- zapisze zależność między promieniem  $R$  kuli, wysokością  $H$  czworościanu  $ABCD$  i wysokością  $h$  ściany czworościanu, np.:  $\frac{R}{H-R} = \frac{\frac{1}{3}h}{h}$ ,

albo

- zapisze zależność między  $R$ , objętością  $V$  czworościanu  $ABCD$  polem  $P_c$  powierzchni całkowitej czworościanu  $ABCD$ , np.:  $R = \frac{3V}{P_c}$ ,

albo

- poprawnie interpretuje wielkość  $d$ , np. pisząc  $d = H - |PD| - R$  lub zaznaczając  $d$  na rysunku

i na tym przestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.**

Zdający:

- obliczy wysokość  $H$  czworościanu  $ABCD$  oraz skalę  $s$  podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną  $\pi$  od czworościanu  $ABCD$  do czworościanu  $ABCD$ :  $H = 2\sqrt{6}$ ,  
 $s = \frac{2}{3}$

albo

- obliczy wysokość  $H$  czworościanu  $ABCD$  oraz obliczy promień  $R$  kuli:  $H = 2\sqrt{6}$ ,  
 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,

albo

- obliczy skalę  $s$  podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną  $\pi$  od czworościanu  $ABCD$  do czworościanu  $ABCD$  oraz promień  $R$  kuli:  $s = \frac{2}{3}$ ,  $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,

albo

- obliczy skalę  $s$  podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną  $\pi$  od czworościanu  $ABCD$  do czworościanu  $ABCD$  oraz wyznaczy promień  $R$  kuli w zależności od  $H$ :  
 $s = \frac{2}{3}$ ,  $R = \frac{1}{4}H$

i na tym przestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający:

- obliczy wysokość  $H$  czworościanu  $ABCD$ , wysokość czworościanu odciętego płaszczyzną  $\pi$  od czworościanu  $ABCD$  do czworościanu  $ABCD$  oraz promień  $R$  kuli:

$$H = 2\sqrt{6}, |DP| = \frac{4}{3}\sqrt{6}, R = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

albo

- wyznaczy szukaną odległość  $d$  w zależności od wysokości  $H$  czworościanu  $ABCD$ , np.:  $d = \frac{1}{3}H - \frac{1}{4}H$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy odległość punktu  $S$  od płaszczyzny  $\pi$ :  $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

#### Zadanie 10. (0–4)

|                                   |                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4). |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### Przykładowe rozwiązania

Równanie można przekształcić równoważnie do postaci:

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0.$$

Podstawiamy  $t = \cos x$ , przy czym  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \sqrt{\Delta} = 1,$$

$$t_1 = \frac{-3-1}{4} = -1,$$

$$t_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Wyznaczamy wartości  $x$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

$$\cos x = -1 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pi \text{ lub } x = \frac{2\pi}{3}, \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}.$$



## Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 p.

Zdający zapisze podane równanie w postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego argumentu, np.  $2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x = -2$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny** ..... 2 p.

Zdający zapisze, że równanie  $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$  ma dwa rozwiązania

$$\cos x = -1 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający

- rozwiąże jedno z równań  $\cos x = -1$  lub  $\cos x = -\frac{1}{2}$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$

albo

- wyznaczy wszystkie rozwiązania równań  $\cos x = -1$  i  $\cos x = -\frac{1}{2}$  w zbiorze  $R$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 p.

Zdający wyznaczy wszystkie rozwiązania równania w podanym przedziale:

$$x = \pi \text{ lub } x = \frac{2\pi}{3}, \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}.$$

### Uwagi

1. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie sprzeczne lub równanie, którego wszystkie rozwiązania są spoza przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma tylko jedno rozwiązanie z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

3. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma dwa rozwiązania z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , przy czym co najmniej jedno z nich jest z przedziału  $(-1, 1)$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

4. Jeżeli zdający poda liczby  $\pi$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$  jako rozwiązanie, ale bez stosownego uzasadnienia, to otrzymuje **0 punktów**. Jeżeli poda te 3 liczby jako rozwiązanie, z uzasadnieniem, np. sprawdzeniem spełniania przez te liczby równości lub odpowiednią ilustracją, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 11. (0–4)**

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1). |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązanie**

Jest to model klasyczny. Za każdym razem mamy 8 możliwości wyciągnięcia jednej piłeczki. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest zbiorem wszystkich ciągów trójwyrazowych o wyrazach ze zbioru liczb całkowitych od 1 do 8. Zatem  $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie zapisania takich trzech liczb, że ich iloczyn dzieli się przez 4. Wtedy możliwe są 3 przypadki.

I. Wszystkie zapisane liczby są parzyste.

II. Dwie z zapisanych liczb są parzyste, a jedna z zapisanych jest nieparzysta.

III. Dwie z zapisanych liczb są nieparzyste, a jedna z zapisanych jest podzielna przez 4.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych w każdym z tych przypadków.

I.  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ .

II.  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 192$ .

III.  $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 96$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4:  $P(A) = \frac{64 + 192 + 96}{512} = \frac{352}{512} = \frac{11}{16}$ .

**Uwaga**

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  możemy też wyznaczyć po uprzednim obliczeniu prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego  $A'$ . Jeżeli iloczyn trzech zapisanych liczb nie dzieli się przez 4, to oznacza, że zachodzi jeden z poniższych przypadków.

I. Wszystkie zapisane liczby są nieparzyste.

II. Dwie z zapisanych liczb są nieparzyste, a jedna z zapisanych jest równa 2 lub 6.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych w każdym z tych przypadków.

I.  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ .

II.  $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 96$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że iloczyn trzech zapisanych liczb nie jest podzielny przez 4:  $P(A') = \frac{64 + 96}{512} = \frac{160}{512} = \frac{5}{16}$ .

Zatem  $P(A) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- obliczy  $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$

albo

- wypisze wszystkie możliwe, ale rozłączne, przypadki, w których wystąpi zdarzenie  $A$  lub zdarzenie  $A'$ ,

albo

- wypisze wszystkie możliwe przypadki, w których wystąpi zdarzenie  $A$  (lub  $A'$ ) i poda taką metodę zliczania zdarzeń elementarnych sprzyjających  $A$  (lub  $A'$ ), która wyklucza powtórzenie tego samego zdarzenia elementarnego,

albo

- obliczy  $|A|$  (lub  $|A'|$ ), stosując poprawną metodę, ale z błędem rachunkowym,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu  $A$  (albo  $A'$ ),

albo

- narysuje niepełne drzewo (może wystąpić brak istotnych gałęzi odpowiadających zdarzeniu  $A$  lub  $A'$ ), ale na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, np.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ , przy czym najwyżej na jednym z trzech odcinków prawdopodobieństwo może być równe 1

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.**

Zdający

- obliczy  $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$  i wypisze wszystkie możliwe, ale rozłączne, przypadki, w których wystąpi zdarzenie  $A$  lub zdarzenie  $A'$

albo

- obliczy  $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$  i wypisze wszystkie możliwe przypadki, w których wystąpi zdarzenie  $A$  (lub  $A'$ ) i poda taką metodę zliczania zdarzeń elementarnych sprzyjających  $A$  (lub  $A'$ ), która wyklucza powtórzenie tego samego zdarzenia elementarnego,

albo

- obliczy  $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$  i obliczy liczbę zdarzeń elementarnych w dwóch spośród przypadków: a) zapisano 3 liczby parzyste, b) zapisano 2 liczby parzyste i jedną nieparzystą, c) zapisano dwie liczby nieparzyste i jedną podzielną przez 4,

albo

- obliczy  $|A| = 352$  lub  $|A'| = 160$ ,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu  $A$  (albo  $A'$ ) i na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, np.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ , przy czym najwyżej na jednym z trzech odcinków prawdopodobieństwo może być równe 1,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi dwóm spośród przypadków: a) zapisano 3 liczby parzyste, b) zapisano 2 liczby parzyste i jedną nieparzystą, c) zapisano dwie liczby nieparzyste i jedną podzielną przez 4 i oblicza prawdopodobieństwo zgodnie z „metodą drzewkową”

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy  $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$  i  $|A| = 352$  (lub  $|A'| = 160$ )

albo

- narysuje poprawne drzewo oraz zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  (albo  $A'$ ) zgodnie z „metodą drzewkową”

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo:  $P(A) = \frac{352}{512} = \frac{11}{16}$ .

### Zadanie 12. (0–5)

|                                |                                                                  |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète’a (R3.1). |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------|

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (4x_1 - 4x_2)^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ , czyli  $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$ . Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność  $4(m+6)^2 > 0$ , której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz  $m = -6$ .

Drugą nierówność przekształcamy równoważnie i otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 16(x_1 - x_2)^2 - 1 &< 0, \\ 16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 &< 0, \\ 16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] - 1 &< 0. \end{aligned}$$

Stosujemy wzory Viete’a i otrzymujemy:  $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$ .

Przekształcamy nierówność równoważnie otrzymujemy kolejno:

$$36m^2 - 32m^2 + 48m + 143 < 0, \\ 4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność.

$$\Delta = 2304 - 2288 = 16 \\ m_1 = \frac{-48 - 4}{8} = -\frac{13}{2}, \quad m_2 = \frac{-48 + 4}{8} = -\frac{11}{2}, \\ m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną obu warunków:  $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right)$ .

## II sposób

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ , czyli  $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$ . Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność  $4(m+6)^2 > 0$ , której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz  $m = -6$ .

Obliczamy pierwiastki równania, z zachowaniem warunku  $x_1 < x_2$ :

$$x_1 = \frac{6m - 2|m+6|}{8} = \frac{3m - |m+6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m+6|}{8} = \frac{3m + |m+6|}{4}.$$

Obliczamy wartość wyrażenia  $4x_1 - 4x_2$  w zależności od  $m$ :

$$4x_1 - 4x_2 = 4 \cdot \frac{-2|m+6|}{4} = -2|m+6|.$$

Zapisujemy nierówność z treści zadania z wykorzystaniem wyznaczonych rozwiązań równania i przekształcamy ją równoważnie, otrzymując kolejno:

$$(-2|m+6|-1)(-2|m+6|+1) < 0, \\ -[1 - 4(m+6)^2] < 0, \\ 4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Dalsza część rozwiązania przebiega podobnie jak w I sposobie rozwiązania,

## **Schemat punktowania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże nierówność  $\Delta \geq 0$  i nie odrzuci przypadku  $\Delta = 0$ , to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na znalezieniu wartości  $m$ , dla których spełniona jest nierówność:  $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$ .

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Poniżej podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje **1 punkt** gdy:

- zapisze nierówność  $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$  w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego  $4x^2 - 6mx + (2m + 3)(m - 3)$ , np.:  $16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] - 1 < 0$   
lub
- obliczy pierwiastki trójmianu:  
$$x_1 = \frac{6m - 2|m + 6|}{8} = \frac{3m - |m + 6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m + 6|}{8} = \frac{3m + |m + 6|}{4}.$$

Zdający otrzymuje **2 punkty** gdy:

- zapisze nierówność  $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$  w postaci nierówności równoważnej z jedną niewiadomą np.:  $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$  lub  $4m^2 + 48m + 143 < 0$   
lub  $(-2|m + 6| - 1)(-2|m + 6| + 1) < 0$ .

Zdający otrzymuje **3 punkty** gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność:  $m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ .

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów

I i II oraz podaniu odpowiedzi:  $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru  $R$  jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.

2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu przyznajemy **0 punktów** za III etap.

3. W przypadku rozwiązania z błędami, nieprzekreślającymi poprawności rozumowania, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II lub gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże etap II (uwaga 3. ma zastosowanie, gdy nie zachodzą przypadki 1. i 2.).

4. Jeżeli zdający w wyniku błędów otrzyma w II etapie nierówność z niewiadomą  $m$  stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem lub nierówność liniową, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

5. W przypadku, gdy zdający przyjmuje błędnie  $\sqrt{\Delta} = 2(m + 6)$  i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

**Zadanie 13. (0–5)**

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz oblicza odległość dwóch punktów (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, 8.6). |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Środek  $S$  szukanego okręgu jest punktem przecięcia prostej  $x - 3y + 1 = 0$  oraz symetralnej odcinka  $AB$ .

Wyznamy współrzędne środka  $D$  odcinka  $AB$ :  $D = \left( \frac{-5+0}{2}, \frac{3+6}{2} \right) = \left( \frac{-5}{2}, \frac{9}{2} \right)$ .

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty  $A$  i  $B$ :

$$a_{AB} = \frac{6-3}{0+5} = \frac{3}{5}.$$

Z warunku prostopadłości prostych wyznaczamy współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka  $AB$ :  $a = -\frac{5}{3}$ . Wyznamy równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $y = -\frac{5}{3}x + b$ .

Przechodzi ona przez punkt  $D = \left( -\frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right)$ , stąd otrzymujemy  $\frac{9}{2} = -\frac{5}{3} \cdot \left( -\frac{5}{2} \right) + b$ . Zatem  $b = \frac{1}{3}$ . Wobec tego symetralną odcinka  $AB$  jest prosta  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ .

Obliczamy współrzędne punktu  $S$ , rozwiązując układ równań  $\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$ . Środkiem

okręgu jest  $S = \left( 0, \frac{1}{3} \right)$ .

Wyznamy promień okręgu  $r$  obliczając np.:  $|AS| = \sqrt{5^2 + \left( \frac{8}{3} \right)^2} = \frac{17}{3}$ .

Wyznamy równanie okręgu o środku w punkcie  $S = \left( 0, \frac{1}{3} \right)$  i promieniu  $r = \frac{17}{3}$ :

$$x^2 + \left( y - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{289}{9}.$$

II sposób

Środkiem okręgu jest punkt  $S$ , który leży na prostej  $x - 3y + 1 = 0$ . Zatem  $S = (3y - 1, y)$ .

Ponieważ  $|AS|^2 = |BS|^2$ , więc możemy zapisać równanie  $(x+5)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y-6)^2$ .

Rozwiązujemy zatem układ równań

$$10x + 6y = 2 \text{ i } x - 3y = -1,$$

otrzymując współrzędne punktu  $S$

$$S = \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Następnie obliczamy kwadrat długości promienia  $|SB|^2 = r^2$

$$r^2 = \left(\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}.$$

Zatem równanie okręgu o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$  ma postać  $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$ .

### III sposób

Przyjmijmy, że punkt  $S = (a, b)$  jest środkiem szukanego okręgu. Ponieważ punkt ten leży na prostej  $x - 3y + 1 = 0$ , więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej. Stąd  $a - 3b + 1 = 0$ .

Okrąg przechodzi przez punkty  $A = (-5, 3)$  i  $B = (0, 6)$ , zatem

$$\begin{cases} (-5 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6 - b)^2 = r^2. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy zależność między  $a$  i  $b$ :  $5a + 3b - 1 = 0$ .

Z układu równań

$$\begin{cases} a - 3b + 1 = 0 \\ 5a + 3b - 1 = 0 \end{cases}$$

obliczamy współrzędne środka okręgu  $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ . Wyznaczone współrzędne podstawiamy do jednego z równań układu z niewiadomą  $r$  i obliczamy kwadrat promienia okręgu:  $r^2 = \frac{289}{9}$ .

Zatem szukane równanie okręgu ma postać:  $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$ .

### **Schematy punktowania**

#### I sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**  
Zdający

- wyznaczy współrzędne środka odcinka  $AB$ :  $D = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej zawierającej odcinek  $AB$ :  $a_{AB} = \frac{3}{5}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.



**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.**

Zdający zapisze równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 3 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $S$ :  $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu):  $r = \frac{17}{3}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający wyznaczy równanie okręgu:  $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$ .

## II sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze współrzędne punktu  $S$  w zależności od jednej zmiennej, np.:  $S = (3y - 1, y)$

albo

- zapisze równość  $|AS|^2 = |BS|^2$  (lub  $|AS| = |BS|$ ) lub równoważne równanie

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y-6)^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze układ równań

$$10x + 6y = 2 \text{ i } x - 3y = -1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 3 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $S$ :

$$S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Wyznaczy kwadrat promienia okręgu (lub promień okręgu):  $r^2 = \frac{289}{9}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu:  $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$ .

III sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 p.

Zdający

- zapisze układ równań: 
$$\begin{cases} (-5-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

albo

- zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie:  $a - 3b + 1 = 0$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny** ..... 2 p.

Zdający zapisze układ równań: 
$$\begin{cases} (-5-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6-b)^2 = r^2 \end{cases}$$
 i zauważy, że współrzędne

środku okręgu spełniają równanie  $a - 3b + 1 = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności** ..... 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $S$ :  $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 4 p.

Wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu):  $r = \frac{17}{3}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu:  $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający oblicza współrzędne punktu  $P$  przecięcia danej prostej z osią  $Oy$ , oblicza odległość  $PB$ , zapisuje równanie okręgu i na tym poprzestaje, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 14. (0–6)**

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | <p>5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na <math>n</math>-ty wyraz i na sumę <math>n</math> początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz stosuje wzór na <math>n</math>-ty wyraz i na sumę <math>n</math> początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. (5.3, 5.4)</p> <p>3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; (R3.3).</p> |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Oznaczmy przez  $r$  różnicę ciągu arytmetycznego. Skoro suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, to  $b - r + b + b + r = 27$ , a stąd  $b = 9$ . Wówczas ciąg geometryczny  $(7 - r, 9, 2r + 19)$  spełnia warunek  $81 = (7 - r) \cdot (2r + 19)$ . Równanie to ma dwa rozwiązania  $r = 4$  i  $r = -\frac{13}{2}$ .

W pierwszym przypadku otrzymujemy ciąg arytmetyczny  $(5, 9, 13)$ , a w drugim przypadku ciąg arytmetyczny  $(\frac{31}{2}, 9, \frac{5}{2})$ .

II sposób

Liczby  $a, b, c$  są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego, zatem  $\frac{a+c}{2} = b$ . Suma liczb  $a, b, c$  równa 27, stąd  $a + b + c = 27$ . Ciąg  $(a - 2, b, 2c + 1)$  jest geometryczny, zatem  $b^2 = (a - 2) \cdot (2c + 1)$ .

Zapisujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi: 
$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a+b+c = 27 \\ b^2 = (a-2) \cdot (2c+1) \end{cases}.$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $a + c = 2b$ , podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy  $b = 9$ .

Do trzeciego równania podstawiamy  $b = 9$  i  $a = 2b - c$  i otrzymujemy równanie kwadratowe:  $2c^2 - 31c + 65 = 0$ . Równanie to ma dwa rozwiązania:  $c = \frac{5}{2}$  oraz  $c = 13$ . W pierwszym

przypadku otrzymujemy:  $a = 5$ ,  $b = 9$ ,  $c = 13$  a w drugim przypadku otrzymujemy:  $a = \frac{31}{2}$ ,

$$b = 9, c = \frac{5}{2}.$$

### III sposób

Niech  $q$  oznacza iloraz ciągu geometrycznego, natomiast  $a-2$  pierwszy wyraz tego ciągu.

Wtedy  $b = (a-2)q$  i  $2c+1 = (a-2)q^2$ . Z ostatniej zależności otrzymujemy  $c = \frac{(a-2)q^2 - 1}{2}$ .

Ponieważ suma liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jest równa 27, więc możemy zapisać równość

$$a + (a-2)q + \frac{(a-2)q^2 - 1}{2} = 27.$$

Z własności ciągu arytmetycznego wynika równanie

$$b = \frac{a+c}{2},$$

które możemy zapisać w postaci

$$(a-2)q = \frac{2a + (a-2)q^2 - 1}{4}.$$

Otrzymaliśmy zatem układ równań z niewiadomymi  $a$  i  $q$ :

$$2a + 2(a-2)q + (a-2)q^2 = 55$$

$$4(a-2)q = 2a + (a-2)q^2 - 1.$$

Ten układ jest równoważny układowi

$$2(a-2) + 2(a-2)q + (a-2)q^2 = 51$$

$$-2(a-2) + 4(a-2)q - (a-2)q^2 = 3$$

Po wyłączeniu czynnika  $(a-2)$  każde z równań przyjmuje postać

$$(a-2)(2 + 2q + q^2) = 51$$

$$(a-2)(-2 + 4q - q^2) = 3$$

Zatem

$$3(2 + 2q + q^2) = 51(-2 + 4q - q^2),$$

skąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3q^2 - 11q + 6 = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania

$$q = 3, \quad q = \frac{2}{3}.$$

Jeśli  $q = 3$ , to  $a = 5$ ,  $b = 9$  i  $c = 13$ . Jeżeli natomiast  $q = \frac{2}{3}$ , to  $a = \frac{31}{2}$ ,  $b = 9$  i  $c = \frac{5}{2}$ .

### **Schemat punktowania**

#### I sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający uzależni wartości dwie spośród liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$  od trzeciej z liczb i od różnicy  $r$  ciągu arytmetycznego, np.:  $a = b - r$  i  $c = b + r$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.**

Zdający zapisze równania wynikające z własności ciągu arytmetycznego i z własności ciągu geometrycznego, np.:  $a = b - r$ ,  $c = b + r$ ,  $b^2 = (a - 2) \cdot (2c + 1)$   
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, wynikające z własności ciągu geometrycznego, np.:  $81 = (7 - r)(2r + 19)$   
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Uwaga**

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 6 p.**

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania:  $a = 5$ ,  $b = 9$ ,  $c = 13$  oraz  $a = \frac{31}{2}$ ,  $b = 9$ ,  $c = \frac{5}{2}$ .

II sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający zapisze jedno z równań:  $\frac{a+c}{2} = b$ ,  $b^2 = (a-2) \cdot (2c+1)$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze układ trzech równań z trzema niewiadomymi, np.: 
$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a+b+c = 27 \\ b^2 = (a-2) \cdot (2c+1) \end{cases}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.:  $-2c^2 + 31c + 16 = 81$ .

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Uwaga**

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

**Rozwiązanie pełne** ..... **6 p.**

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania:  $a = 5$ ,  $b = 9$ ,  $c = 13$  oraz  $a = \frac{31}{2}$ ,  $b = 9$ ,  $c = \frac{5}{2}$ .

III sposób rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania** ..... **1 p.**

Zdający zapisze wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego w zależności od jednej z liczb i ilorazu ciągu geometrycznego, np.

$$a - 2, b = (a - 2)q, c = \frac{(a - 2)q^2 - 1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny** ..... **2 p.**

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$a + (a - 2)q + \frac{(a - 2)q^2 - 1}{2} = 27 \text{ i } (a - 2)q = \frac{2a + (a - 2)q^2 - 1}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... **3 p.**

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.:

$$3(2 + 2q + q^2) = 51(-2 + 4q - q^2)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... **5 p.**

Zdający obliczy liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Uwaga**

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

**Rozwiązanie pełne** ..... **6 p.**

Zdający zapisze dwa zestawy liczb spełniające warunki zadania:  $a = 5$ ,  $b = 9$  i  $c = 13$

oraz  $a = \frac{31}{2}$ ,  $b = 9$  i  $c = \frac{5}{2}$ .

**Uwagi (do wszystkich schematów punktowania)**

1. Jeżeli zdający myli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie jeden zestaw liczb  $a, b, c$ , także ze sprawdzeniem warunków zadania, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 15. (0–7)**

|                                |                                                                                                          |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6). |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązanie**

Niech  $r$  oraz  $h$  oznaczają, odpowiednio, promień podstawy walca i wysokość walca. Pole  $P$  powierzchni całkowitej tego walca jest równe  $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ . Stąd

$$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Objętość walca  $V = \pi r^2 h$  zapisujemy jako funkcję zmiennej  $r$ :

$$V(r) = \pi r^2 \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}, \text{ gdzie } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Pochodna funkcji  $V$  jest określona wzorem

$$V'(r) = \frac{1}{2}(P - 6\pi r^2) \text{ dla } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Wyznaczamy miejsca zerowe i badamy znak pochodnej

$$V'(r) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}},$$

$$V'(r) > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{6\pi}},$$

$$V'(r) < 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sqrt{\frac{P}{6\pi}} < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Wynika stąd, że w przedziale  $(0, \sqrt{\frac{P}{6\pi}})$  funkcja  $V$  jest rosnąca, a w przedziale  $(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \sqrt{\frac{P}{2\pi}})$  jest malejąca. Zatem  $V(\sqrt{\frac{P}{6\pi}})$  jest największą wartością tej funkcji. Wartość ta jest równa

$$V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right) = \frac{P \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}} - 2\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^3}{2} = \frac{P}{3} \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

$$\text{Gdy } r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \text{ to wtedy } h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}.$$

**Schemat punktowania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie wysokości walca w zależności od promienia podstawy walca:

$$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r},$$

- wyznaczenie objętości walca jako funkcji jednej zmiennej  $r$ ,  $V(r) = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}$ ,
- wyznaczenie dziedziny funkcji  $V$ :  $D_V = \left(0, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$ .

Za poprawne wykonanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**.

b) **Drugi etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej  $f(r) = \frac{P}{2} \cdot r - \pi r^3$ :  

$$f'(r) = \frac{P}{2} - 3\pi r^2,$$
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $V$ :  $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$  lub obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $f$ :  $r = -\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ ,  $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ .
- zbadanie znaku pochodnej funkcji  $V$  i uzasadnienie, że dla  $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$  funkcja  $V$  osiąga największą wartość.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

c) **Trzeci etap**.

Obliczenie największej objętości walca i wysokości walca o największej objętości:

$$V = \frac{P}{3} \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \quad h = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}.$$

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze objętość walca z błędem rzeczowym, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli dodatkowo poprawnie wyznaczy dziedzinę funkcji  $V$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający obliczy pochodną funkcji  $f$  lub  $V$  z błędem rachunkowym i otrzyma funkcję liniową albo funkcję kwadratową o ujemnym wyróżniku o wyróżniku równym 0, to może otrzymać punkty jedynie za pierwszy etap rozwiązania.
3. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie dla stożka, to otrzymuje **0 punktów**, nawet jeśli rozwiązanie tego innego zadania jest poprawne.
4. Za rozwiązanie z konkretną wartością liczbową w miejsce  $P$  zdający otrzymuje **0 punktów**.