

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-660, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00
<i>Termin egzaminu:</i>	11 maja 2026 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.3R) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3R) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8R) rozwiązuje proste nierówności wymierne [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 2012 poz. 977).

Rozwiązanie

B

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.2R) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)**Zadanie 5. (0–2)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.1R) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym.

Zasady oceniania

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

8	2	8
---	---	---

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

- 3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{28}$.
- 2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych **oraz** wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , np.
 $|\Omega| = 8!$ oraz $|A| = 2 \cdot 6!$.
- 1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, np. $|\Omega| = 8!$
ALBO
 – zapisanie, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A , musi być liczba podzielna przez 3,
ALBO
 – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , np. $|A| = 2 \cdot 6!$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A , musi być liczba podzielna przez 3, ale – obliczając liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A – zapisze $|A| = 6!$ (lub $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 6!$) oraz rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze $|\Omega| = \binom{8}{2}$ (lub $|\Omega| = 8 \cdot 7$) bez stosownego komentarza i na tym zakończy, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Jest to model klasyczny. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Wówczas $|\Omega| = 8!$.

Iloczyn trzech liczb całkowitych jest podzielny przez 3, gdy co najmniej jedna z tych liczb jest podzielna przez 3. Wobec tego, aby iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu był liczbą podzielną przez 3, to jeden z tych trzech wyrazów musi być liczbą podzielną przez 3.

W zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ są dokładnie dwie liczby podzielne przez 3: 3 oraz 6.

Niech ciąg $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ będzie zdarzeniem elementarnym, które sprzyja zdarzeniu A . W tym ciągu liczbowym znajdują się dokładnie dwie liczby podzielne przez 3: 3 oraz 6. Zatem jedna z tych liczb znajduje się wśród wyrazów a_1, a_2, a_3 (gdyż iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ jest podzielny przez 3), a druga z nich znajduje się wśród wyrazów a_6, a_7, a_8 (gdyż iloczyn $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$ jest podzielny przez 3), więc wyrazy a_4 oraz a_5 nie są podzielne przez 3. Stąd i z tego, że iloczyny $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$ oraz $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$ są podzielne przez 3, wynika, że wyrazy a_3 oraz a_6 muszą być podzielne przez 3, tj.

$\{a_3, a_6\} = \{3, 6\}$.

Jeżeli zdarzenie elementarne jest ciągiem, w którym trzecim i szóstym wyrazem są liczby 3 oraz 6, to iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów takiego ciągu jest liczbą podzielną przez 3. Zatem takie zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu A .

Dlatego zdarzeniu A sprzyjają jedynie zdarzenia elementarne będące ciągami, których trzecim oraz szóstym wyrazem są liczby 3 oraz 6. Liczba wszystkich takich ciągów jest równa $|A| = 2 \cdot 6!$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

Zadanie 7. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1R) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj.:

- przekształcenie nierówności $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ do postaci $(x - y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) i zapisanie, że kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny
ALBO
- przekształcenie nierówności $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ do postaci $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x + y)(x - y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) **oraz** uzasadnienie, że dla liczb dodatnich x, y nierówność $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ (lub nierówność $\frac{(x + y)(x - y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) jest prawdziwa,
ALBO
- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji f **oraz** uzasadnienie, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $x = y$ i obliczenie $f(y)$.

2 pkt – przekształcenie nierówności $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ do postaci $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2y^2} \geq 0$)

ALBO

– przekształcenie nierówności $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ do postaci $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x + y)(x - y)^2}{x^2y^2} \geq 0$),

ALBO

– obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji f : $x = y$.

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $W(x, y) \geq 0$ (lub do postaci $\frac{W(x, y)}{x^2y^2} \geq 0$), gdzie W jest wielomianem zmiennych x oraz y , np.:

$$x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y \geq 0, \quad x^3 + y^3 - xy(x + y) \geq 0, \quad \frac{x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y}{x^2y^2} \geq 0$$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $\frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2y^2} \geq \frac{x + y}{xy}$,

ALBO

– rozważenie funkcji $f(x) = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ zmiennej dodatniej x z parametrem $y > 0$ **oraz** wyznaczenie pochodnej tej funkcji, np. $f'(x) = \frac{1}{y^2} - \frac{2y}{x^3} + \frac{1}{x^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości x i y , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przekształci nierówność do postaci $(x^2 - y^2)(x - y) \geq 0$, a następnie uzasadni prawdziwość tej nierówności w przypadku, gdy $x > y$ oraz w przypadku, gdy $x < y$, a pominie przypadek $x = y$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (suma sześciątów)

Z założenia $x > 0$ oraz $y > 0$, więc $x^2y^2 > 0$. Mnożymy obie strony nierówności

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ przez x^2y^2 i otrzymujemy

$$xy^2 + yx^2 \leq x^3 + y^3$$

Stosujemy wzór na sumę sześciątów oraz kwadrat różnicy i dostajemy:

$$xy(x + y) \leq (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$0 \leq (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$0 \leq (x + y)(x - y)^2$$

Ponieważ $(x + y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich x oraz y , a ponadto $(x - y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x - y)$, więc $(x + y)(x - y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność

$0 \leq (x + y)(x - y)^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y . To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej x i każdej liczby dodatniej y nierówność $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

Sposób II (grupowanie)

Z założenia $x > 0$ oraz $y > 0$, więc $x^2y^2 > 0$. Mnożymy obie strony nierówności

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ przez x^2y^2 oraz stosujemy wzór na różnicę kwadratów i otrzymujemy kolejno:

$$xy^2 + yx^2 \leq x^3 + y^3$$

$$0 \leq x^3 - xy^2 + y^3 - yx^2$$

$$0 \leq x(x^2 - y^2) + y(y^2 - x^2)$$

$$0 \leq (x - y)(x^2 - y^2)$$

$$0 \leq (x - y)^2(x + y)$$

Ponieważ $(x + y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich x oraz y , a ponadto $(x - y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x - y)$, więc $(x + y)(x - y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność

$0 \leq (x + y)(x - y)^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y . To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej x i każdej liczby dodatniej y nierówność $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

Sposób III

Z założenia wynika, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$, więc przekształcamy równoważnie nierówność

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$, rozszerzając odpowiednie ułamki i stosując wzór na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ 0 &\leq \frac{x^3}{x^2y^2} + \frac{y^3}{x^2y^2} - \frac{y^2x}{x^2y^2} - \frac{x^2y}{x^2y^2} \\ 0 &\leq \frac{x^3 + y^3 - y^2x - x^2y}{x^2y^2} \\ 0 &\leq \frac{x(x^2 - y^2) + y(y^2 - x^2)}{x^2y^2} \\ 0 &\leq \frac{(x - y)(x^2 - y^2)}{x^2y^2} \\ 0 &\leq \frac{(x - y)^2(x + y)}{x^2y^2} \end{aligned}$$

Ponieważ:

- $(x + y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich x oraz y
- $(x - y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x - y)$
- x^2y^2 jest dodatnie jako iloczyn kwadratów liczb dodatnich x oraz y ,

więc $\frac{(x - y)^2(x + y)}{x^2y^2}$ jest nieujemne jako iloraz liczby nieujemnej $(x - y)^2(x + y)$ i liczby

dodatniej x^2y^2 . Zatem nierówność $0 \leq \frac{(x - y)^2(x + y)}{x^2y^2}$ jest prawdziwa dla każdej liczby

dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y . To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej x

i każdej liczby dodatniej y nierówność $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

Sposób IV (badanie funkcji)

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ zmiennej dodatniej x z parametrem $y > 0$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{1}{y^2} - \frac{2y}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 2y^3 + xy^2}{x^3y^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - y^3 + xy^2 - y^3}{x^3y^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2) + y^2(x-y)}{x^3y^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-y)(x^2 + xy + 2y^2)}{x^3y^2}$$

Ponieważ $x > 0$ oraz $y > 0$, więc $x^2 + xy + 2y^2 > 0$ i $x^3y^2 > 0$. Zatem:

- $f'(x) = 0$ tylko dla $x = y$
- $f'(x) > 0$ w przedziale $(y, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ w przedziale $(0, y)$.

Stąd funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, y]$ i jest rosnąca w przedziale $[y, +\infty)$.

Zatem funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $x = y$. Ponieważ

$$f(y) = \frac{y}{y^2} + \frac{y}{y^2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = 0, \text{ więc}$$

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 0$$

czyli

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$$

dla każdej liczby dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y .

To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.4R) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – uzasadnienie, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe) i przedstawienie kompletnego rozumowania prowadzącego do wyznaczenia poprawnego równania z niewiadomą $|PQ|$ oraz zapisanie tego równania
ALBO

– przyjęcie bez uzasadnienia, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe) **oraz** przeprowadzenie pełnego rozumowania przy tym założeniu

i otrzymanie tezy $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu Q : $Q = \left(\frac{4}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

1 pkt – uzasadnienie, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe)
ALBO

– obliczenie długości boku KM trójkąta DKM i długości jednego z pozostałych dwóch boków tego trójkąta: $|KM| = \frac{\sqrt{5}}{4}a$, $|DK| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|DM| = \frac{5}{4}a$,

ALBO

– obliczenie długości jednego z odcinków AP , DP lub PK : $|AP| = \frac{1}{\sqrt{5}}a$,

$|DP| = \frac{2}{\sqrt{5}}a$, $|PK| = \frac{1}{2\sqrt{5}}a$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu P : $P = \left(\frac{2}{5}a, \frac{1}{5}a\right)$,

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty EKD i MKD są przystające.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmie błędne założenie (np. że miara kąta AKD jest równa 60°) i na tym opiera swoje rozumowanie, to otrzymuje **0 punktów**.

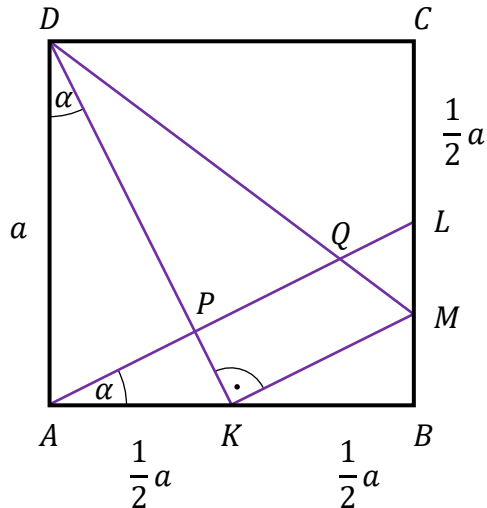
2. Jeżeli zdający uzasadni, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe), a w dalszej części rozwiązania popełni tylko jeden błąd rachunkowy, ale zrealizuje w pełni strategię rozwiązania zadania, otrzymując równanie z jedną niewiadomą $|PQ|$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy miarę kąta ADK przez α . Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty DAK oraz ABL są proste, więc trójkąty DAK i ABL są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$.



Stąd wynika, że miary kątów ostrych trójkąta APK są równe miarom odpowiednich kątów ostrych trójkątów DAK i ABL . To oznacza, że trójkąt APK jest prostokątny i podobny do trójkątów DAK oraz DPA , więc

$$\frac{|AD|}{|AK|} = \frac{|AP|}{|PK|} = \frac{|DP|}{|AP|} = 2$$

Stąd $|DP| = 2 \cdot |AP| = 2 \cdot (2 \cdot |PK|) = 4 \cdot |PK|$.

Kąt DKM jest prosty i $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle PDQ|$, więc trójkąty prostokątne DKM oraz DPQ są podobne, a skala podobieństwa jest równa

$$\frac{|DK|}{|DP|} = \frac{|DK|}{|DP| + |PK|} = \frac{5 \cdot |PK|}{4 \cdot |PK|} = \frac{5}{4}$$

Zatem $|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM|$, a ponieważ trójkąt KBM jest podobny do trójkąta ABL w skali $1 : 2$, więc

$$|KM| = \frac{1}{2} \cdot |AL| = \frac{1}{2} \cdot |DK| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4} a$$

i tym samym

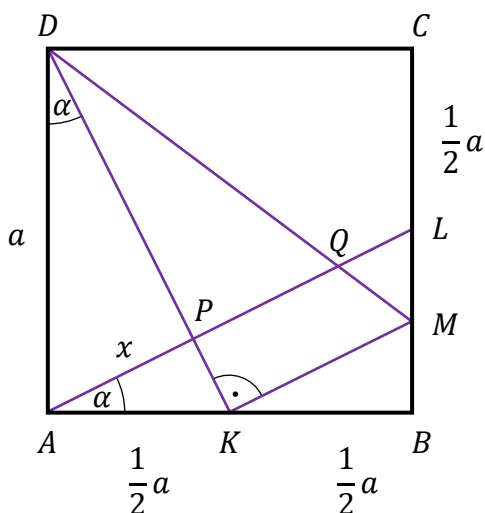
$$|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM| = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} a = \frac{\sqrt{5}}{5} a$$

To należało wykazać.

Sposób II

Niech $x = |AP|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty DAK oraz ABL są proste, więc trójkąty DAK i ABL są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$.



Kąty DAP oraz ALB są naprzemianległe i $AD \parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle ALB| = 90^\circ - \alpha$.

Zatem trójkąt DPA jest prostokątny i podobny do trójkąta DAK . Stąd $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$, czyli

$$|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x.$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta DAP otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt DPA jest prosty, więc $AL \parallel KM$. Zatem trójkąty prostokątne DKM i DPQ oraz ADK i BKM są podobne. Skala podobieństwa trójkątów ADK i BKM jest równa $\frac{|AD|}{|BK|} = 2$, więc $|DK| = 2 \cdot |KM|$. Stąd z kolei wynika, że trójkąt DKM jest podobny do trójkąta DAK , więc jest również podobny do trójkąta DPA . Zatem $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle ADP| = \alpha$. Wobec tego trójkąty prostokątne DPA i DPQ są przystające (cecha kbk). Stąd

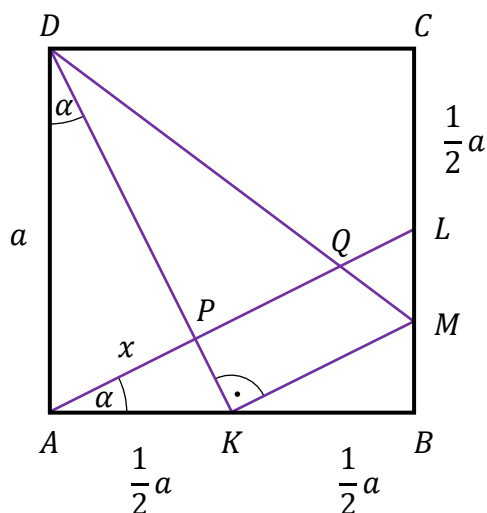
$$|PQ| = |AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} a$$

To należało wykazać.

Sposób III

Niech $x = |AP|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty DAK oraz ABL są proste, więc trójkąty DAK i ABL są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$.



Kąty DAP oraz ALB są naprzemianległe i $AD \parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle ALB| = 90^\circ - \alpha$.

Zatem trójkąt DPA jest prostokątny i podobny do trójkąta DAK . Stąd $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$, czyli

$$|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x.$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta DAP otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt DPA jest prosty, więc $AL \parallel KM$. To oznacza, że $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle BAL|$, więc trójkąty prostokątne ADK i BKM są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa

$$\frac{|AD|}{|BK|} = 2. \text{ Stąd } |MB| = \frac{1}{2} \cdot |AK| = \frac{1}{4}a \text{ oraz } |LM| = |BL| - |MB| = \frac{1}{4}a.$$

Ponieważ $AD \parallel BC$, więc kąty naprzemianległe ADQ i QML mają równe miary. Z tej samej przyczyny kąty naprzemianległe QAD i QLM mają równe miary. Zatem trójkąty

AQD i LQM są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa $\frac{|AD|}{|LM|} = \frac{a}{\frac{1}{4}a} = 4$. Stąd

$$|LQ| = \frac{1}{4} \cdot (|AP| + |PQ|) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}a + |PQ| \right)$$

Ale $|LQ| + |AP| + |PQ| = |AL| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, więc

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

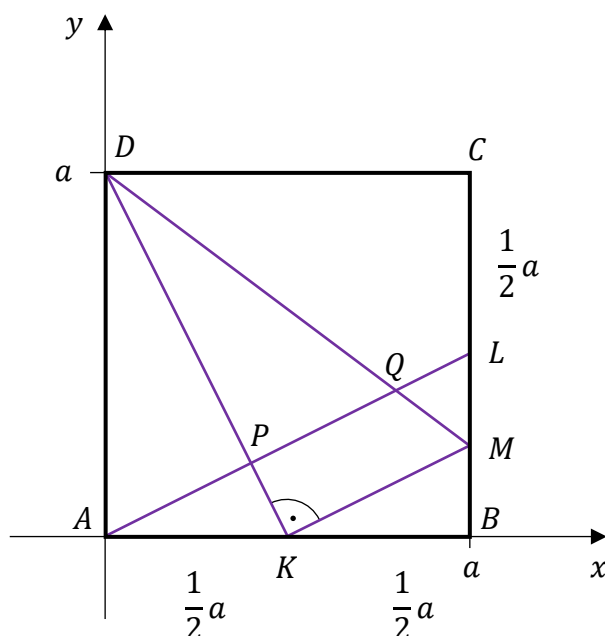
$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

Sposób V (analitycznie)

Umieszczamy kwadrat $ABCD$ w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) tak, żeby $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$ (zobacz rysunek).



Wówczas $K = \left(\frac{1}{2}a, 0\right)$ oraz $L = \left(a, \frac{1}{2}a\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej DK :

$$y = \frac{0 - a}{\frac{1}{2}a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -2x + a$$

Wyznaczamy równanie prostej AL :

$$y = \frac{\frac{1}{2}a - 0}{a - 0} \cdot x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Wyznaczamy współrzędne punktu P :

$$\frac{1}{2}x = -2x + a$$

$$x = \frac{2}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}a = \frac{1}{5}a$$

Zatem $P = \left(\frac{2}{5}a, \frac{1}{5}a\right)$.

Prosta KM jest prostopadła do prostej DK , więc współczynnik kierunkowy w równaniu prostej KM jest równy $\frac{1}{2}$. Zatem prosta KM ma równanie $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}a\right)$. Stąd druga współrzędna punktu M jest równa $\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a$, czyli $M = \left(a, \frac{1}{4}a\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej DM :

$$y = \frac{\frac{1}{4}a - a}{a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -\frac{3}{4}x + a$$

Obliczamy współrzędne punktu Q , korzystając z równań prostych AL i DM :

$$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + a$$

$$x = \frac{4}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}a = \frac{2}{5}a$$

Zatem $Q = \left(\frac{4}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

Obliczamy długość odcinka PQ :

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}a - \frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{2}{5}a - \frac{1}{5}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 5.4) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(-1\ 026\ 168)$.

3 pkt – obliczenie liczby n wyrazów ciągu arytmetycznego: $n = 1014$.

2 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą r : $r = 0$ oraz $r = -2$

ALBO

– obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającej warunki zadania:

$$r = -2,$$

ALBO

– rozwiązanie równania z jedną niewiadomą q : $q = 1$ oraz $q = 3$,

ALBO

– obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego (a_2, a_3, a_6) spełniającego warunki zadania: $q = 3$,

ALBO

– obliczenie/zapisanie, że ciąg (a_2, a_3, a_6) nie jest stały i rozwiązanie równania z jedną niewiadomą a_2 : $a_2 = -1$,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą n , np.

$$\left(1 + 2 \cdot \frac{-2026}{n-1}\right)^2 = \left(1 + \frac{-2026}{n-1}\right) \left(1 + 5 \cdot \frac{-2026}{n-1}\right)$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r , np. $(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą q , np. $3q - 3 = q^2 - q$,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2 , np. $a_2 = 1 + 2a_2$ (dla sposobu III),

ALBO

– wyznaczenie różnicy ciągu (a_n) w zależności od liczby n wyrazów ciągu

$$\text{arytmetycznego } (a_n): r = \frac{-2026}{n-1}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z ciągiem geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający stosuje błędny wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma wartość n , która nie jest liczbą naturalną, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie (traktujemy to jak obliczenie liczby wyrazów ciągu arytmetycznego z błędem rachunkowym). Zdający nie otrzymuje punktu za obliczenie sumy wyrazów ciągu arytmetycznego.
4. a) Jeżeli zdający przyjmie, że $r = -2$ i sprawdzi rachunkiem, że ta wartość spełnia warunki zadania, ale nie uzasadni, że jest to jedyna wartość r spełniająca warunki zadania, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za obliczenie n oraz za obliczenie sumy).
- b) Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że $r = -2$ i na tym opiera swoje rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) . Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy: $a_2 = 1 + r$, $a_3 = 1 + 2r$, $a_6 = 1 + 5r$ oraz $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$$

$$0 = 2r + r^2$$

$$0 = r(2 + r)$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = -2$$

Dla $r = 0$ warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) nie są równe.

Dla $r = -2$ otrzymujemy $a_2 = -1$, $a_3 = -3$, $a_6 = -9$. Ciąg $(-1, -3, -9)$ jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione.

Obliczamy liczbę n wyrazów ciągu (a_n) :

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę S_{1014} wszystkich wyrazów ciągu (a_n) :

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

Sposób II

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) . Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_2, a_3, a_6) . Ciąg arytmetyczny (a_n) jest malejący, więc ciąg (a_2, a_3, a_6) nie jest stały. Zatem $q \neq 1$ oraz $a_2 \neq 0$. Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego i własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy: $a_3 = a_2 \cdot q$, $a_6 = a_2 \cdot q^2$ oraz $3(a_3 - a_2) = a_6 - a_3$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$\begin{aligned}
3(a_3 - a_2) &= a_6 - a_3 \\
3a_2 \cdot q - 3a_2 &= a_2 \cdot q^2 - a_2 \cdot q \\
0 &= a_2 \cdot (q^2 - 4q + 3) \\
a_2 = 0 \vee q^2 - 4q + 3 &= 0 \\
a_2 = 0 \vee q = 1 \vee q = 3 &
\end{aligned}$$

Dla $a_2 = 0$ oraz dla $q = 1$ warunki zadania nie są spełnione, czyli $q = 3$. Zatem $a_3 = 3a_2$, $a_6 = 9a_2$.

Korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i obliczamy a_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_3}{2} &= a_2 \\
\frac{1 + 3a_2}{2} &= a_2 \\
a_2 &= -1
\end{aligned}$$

Ponieważ $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$, więc różnica ciągu arytmetycznego jest równa (-2) . Obliczamy liczbę n wyrazów ciągu (a_n) :

$$\begin{aligned}
-2025 &= 1 + (n - 1) \cdot (-2) \\
n &= 1014
\end{aligned}$$

Obliczamy sumę S_{1014} wszystkich wyrazów ciągu (a_n) :

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

Sposób III

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) . Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy: $a_3 = a_2 + r$, $a_6 = a_2 + 4r$ oraz $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$\begin{aligned}
(a_3)^2 &= a_2 \cdot a_6 \\
(a_2 + r)^2 &= a_2 \cdot (a_2 + 4r) \\
a_2^2 + 2a_2r + r^2 &= a_2^2 + 4a_2r \\
0 &= r(2a_2 - r) \\
r = 0 \vee r &= 2a_2
\end{aligned}$$

Dla $r = 0$ warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) nie są równe.

Dla $r = 2a_2$ otrzymujemy $a_2 = 1 + 2a_2$. Stąd $a_2 = -1$, więc $r = -2$. Zatem $a_3 = -3$ oraz $a_6 = -9$. Ciąg $(-1, -3, -9)$ jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione.

Obliczamy liczbę n wyrazów ciągu (a_n) :

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę S_{1014} wszystkich wyrazów ciągu (a_n) :

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik, np.: $\frac{\pi k}{2}$ oraz $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ oraz $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych i rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy, np.:

- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos^2(2x) = \frac{3}{4})$ oraz $x = \frac{\pi k}{2}$ (rozwiązania równania $\sin(2x) = 0$)
- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ lub } \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2})$ oraz $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$ oraz $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$ (rozwiązania równania $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)
- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos(4x) = \frac{1}{2})$ oraz $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ (rozwiązania równania $\cos(4x) = \frac{1}{2}$)
- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \sin(2x) = -\frac{1}{2} \text{ lub } \sin(2x) = \frac{1}{2})$ oraz $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ oraz $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$ (rozwiązania równania $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$), gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych, np.:

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos^2(2x) = \frac{3}{4},$$

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ lub } \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } 2 \cos(4x) - 1 = 0,$$

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } 4 \sin^2(2x) - 1 = 0.$$

1 pkt – zastosowanie wzoru na sinus sumy i przekształcenie równania do postaci

$$\sin(4x) \cos(2x) + \cos(4x) \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0 \text{ (dla sposobu I)}$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na różnicę sinusów i przekształcenie równania do postaci

$$2 \cos(4x) \sin(2x) - \sin(2x) = 0 \text{ (dla sposobu II),}$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sinus potrójonego kąta i przekształcenie równania do postaci

$$-4 \sin^3(2x) + 3 \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0 \text{ (dla sposobu III).}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. a) Jeżeli zdający popełni błędy, które nie są rachunkowe, nie zrealizuje wymagań z kryterium za 1 punkt, przekształci równanie do postaci $\sin(2x) \cdot f(x) = 0$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za rozwiązanie równania $\sin(2x) = 0$).
 b) Jeżeli zdający zrealizuje wymagania z kryterium za 1 punkt, a następnie popełni błędy, które nie są rachunkowe, przekształci równanie do postaci $\sin(2x) \cdot f(x) = 0$ i rozwiąże równanie $\sin(2x) = 0$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający popełni tylko błędy rachunkowe i przekształci równanie do postaci $\sin(2x) \cdot f(x) = 0$, gdzie funkcja trygonometryczna f nie ma miejsc zerowych lub równanie trygonometryczne $f(x) = 0$ ma jedną serię rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, oraz rozwiąże równanie $\sin(2x) = 0$, otrzymując $x = \frac{\pi k}{2}$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył praw do innej punktacji.
3. Jeżeli zdający przyjmie $u = 2x$ i rozwiąże równanie $\sin(3u) - 2 \sin u = 0$ (lub równanie $-4 \sin^3 u + 3 \sin u - 2 \sin u = 0$) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez sinus sumy)

Przekształcamy równanie $\sin(6x) - 2 \sin(2x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus sumy kątów i cosinus podwojonego kąta:

$$\sin(4x + 2x) - 2 \sin(2x) = 0$$

$$\sin(4x) \cos(2x) + \cos(4x) \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0$$

$$2 \sin(2x) \cos^2(2x) + [2 \cos^2(2x) - 1] \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) [4 \cos^2(2x) - 3] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos^2(2x) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(2x) = 0$:

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ są wszystkie liczby postaci:

$\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $-\frac{\pi}{12} + \pi k$ oraz $\frac{\pi}{12} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób II (poprzez różnicę sinusów)

Przekształcamy równanie $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na różnicę sinusów:

$$\sin(6x) - \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \sin\left(\frac{6x-2x}{2}\right) - \sin(2x) = 0$$

$$2 \cos(4x) \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) [2 \cos(4x) - 1] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos(4x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pi k \quad \vee \quad 4x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \vee \quad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ są wszystkie liczby postaci:

$\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ oraz $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób III (poprzez sinus potrójonego kąta)

Przekształcamy równanie $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus potrójonego kąta:

$$\sin(3 \cdot 2x) - 2\sin(2x) = 0$$

$$-4 \sin^3(2x) + 3 \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) [-4 \sin^2(2x) + 1] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \vee \sin^2(2x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(2x) = 0 \vee \sin(2x) = -\frac{1}{2} \vee \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pi k \vee 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \vee 2x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \vee 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \vee x = \frac{7\pi}{12} + \pi k \vee x = \frac{11\pi}{12} + \pi k \vee x = \frac{\pi}{12} + \pi k \vee x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ są wszystkie liczby postaci:

$$\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k, \frac{7\pi}{12} + \pi k \text{ oraz } \frac{11\pi}{12} + \pi k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a = 3\sqrt{6}$ oraz $\cos \beta = \frac{5}{14}$.

3 pkt – obliczenie wysokości x ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa:

$$x = \sqrt{42}$$

ALBO

– obliczenie $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$: $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 3\sqrt{6}$ **oraz** zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów α i β , np.

$$1 = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 - \cos \beta), \quad 1 = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha},$$

ALBO

– obliczenie cosinusa kąta β : $\cos \beta = \frac{5}{14}$.

2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$: $a = 3\sqrt{6}$ oraz

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

ALBO

– zapisanie związków $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ oraz $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{|EB|}{x}$,

ALBO

– obliczenie długości (lub kwadratu długości) b krawędzi bocznej ostrosłupa: $b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$$(\text{lub } b^2 = \frac{243}{4}),$$

ALBO

– zapisanie zależności między długością krawędzi bocznej ostrosłupa i wysokością

ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa, np.: $\frac{x}{b} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$,

$$\frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \frac{2\sqrt{14}}{9} = \frac{1}{2} b \cdot x, \quad \left(\frac{5}{9}b\right)^2 + x^2 = b^2,$$

ALBO

– zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów α i β , np.

$$1 = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 - \cos \beta), \quad 1 = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}.$$

1 pkt – obliczenie długości a krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 3\sqrt{6}$

ALBO

– obliczenie $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) : \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$,

ALBO

– obliczenie $\sin \alpha : \sin \alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}$,

ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABD i zapisanie równania

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \beta$$

ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BCS i zapisanie równania

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos \alpha$$

ALBO

– zapisanie zależności między a, x oraz α , np. $\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{a}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{a}$,

ALBO

– zapisanie zależności między b, x oraz α , np. $\sin \alpha = \frac{x}{b}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do ściany bocznej – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub długości krawędzi bocznej – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślника piątego z kategorii za **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do trójkąta z tym kątem – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub wysokości ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka podstawy ostrosłupa – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślnika czwartego z kategorii za **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę niż ostrosłup prawidłowy trójkątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki podstawy ostrosłupa,

S – wierzchołek ostrosłupa,

D – punkt wspólny wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B

i wysokości ściany bocznej ACS poprowadzonej z wierzchołka A ,

E, F – środki krawędzi – odpowiednio – AB i BC ,

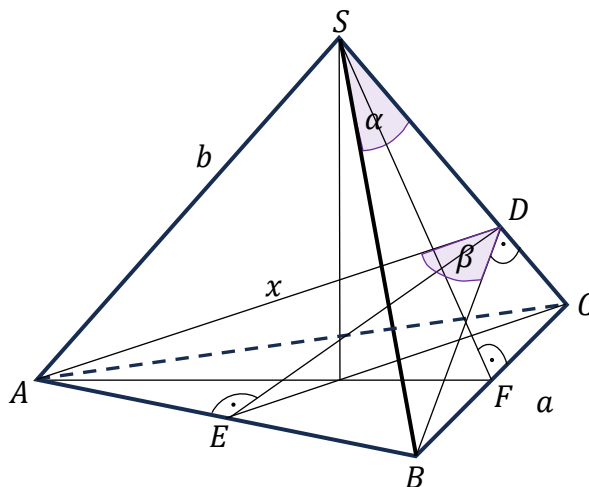
α – miara kąta BSC ,

β – miara kąta dwuściennego zawartego między ścianami bocznymi BCS i ACS ostrosłupa $ABCS$,

a – długość krawędzi podstawy ABC ,

b – długość krawędzi bocznej,

x – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy ABC (zobacz rysunek).



Sposób I (z pominięciem krawędzi bocznej)

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\frac{5}{9} = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3} \vee \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ $\alpha < 180^\circ$, więc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ponieważ $|\sphericalangle FCS| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, więc $|\sphericalangle CBD| = \frac{\alpha}{2}$. Zatem:

$$\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$x = \sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD i obliczamy $\cos \beta$:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$(3\sqrt{6})^2 = 2 \cdot 42 - 2 \cdot 42 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{5}{14}$$

Sposób II (poprzez krawędź boczną)

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BCS i obliczamy długość krawędzi bocznej:

$$(3\sqrt{6})^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$54 = 2b^2 - 2b^2 \cdot \frac{5}{9}$$

$$b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BFS i obliczamy wysokość SF ściany bocznej BCS :

$$|SF| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$|SF| = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

Korzystamy z podobieństwa trójkątów CDB oraz BFS i obliczamy długość BD :

$$\frac{x}{a} = \frac{|SF|}{b}$$

$$x = a \cdot \frac{|SF|}{b}$$

$$x = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{21}}{9\sqrt{3}}}{\frac{2}{2}} = \sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD i obliczamy $\cos \beta$:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$(3\sqrt{6})^2 = 2 \cdot 42 - 2 \cdot 42 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{5}{14}$$

Sposób III (poprzez $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$)

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\frac{5}{9} = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3} \vee \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ $\alpha < 180^\circ$, więc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ponieważ $|\sphericalangle FCS| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, więc $|\sphericalangle CBD| = \frac{\alpha}{2}$ i $\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Stąd i ze związku

$\frac{|EB|}{x} = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ otrzymujemy:

$$\frac{|EB|}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

Obliczamy $\cos \beta$:

$$\cos \beta = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos \beta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2$$

$$\cos \beta = \frac{5}{14}$$

Sposób IV

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BDA i otrzymujemy:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$a^2 = 2x^2(1 - \cos \beta)$$

Z trójkąta prostokątnego BDS otrzymujemy $\frac{x}{b} = \sin \alpha$, więc $x = b \cdot \sin \alpha$ i dlatego

$$a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos \beta)$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BCS i otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = 2b^2(1 - \cos \alpha)$$

Stąd i z zależności $a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos \beta)$ otrzymujemy:

$$2b^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos \beta) = 2b^2(1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos \beta = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 - \cos \beta = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$1 - \cos \beta = \frac{1}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{5}{9}}{1 + \frac{5}{9}} = \frac{5}{14}$$

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt. 8.7R) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach.

Zasady oceniania (dla sposobu I)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów C oraz M : $C = (2, 1)$ oraz $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu C oraz długości odcinka MC : $C = (2, 1)$

oraz $|MC| = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C : $C = (2, 1)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu C),
oraz wyznaczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych

punktów A oraz C , np. $6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0$ oraz

$x_M = \frac{1}{5}(x_C - x_A) + x_A$ oraz $y_M = \frac{1}{5}(y_C - y_A) + y_A$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu C),

np. $6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0$, $6(4 - 2y_C) + 2y_C - 14 = 0$

ALBO

– wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku AB trójkąta **oraz**
wyznaczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych punktów A
oraz C , np.

$6x + 2y - 14 = 0$ oraz $x_M = \frac{1}{5}(x_C - x_A) + x_A$ oraz $y_M = \frac{1}{5}(y_C - y_A) + y_A$.

1 pkt – wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku AB trójkąta, np.

$6x + 2y - 14 = 0$

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu C w zależności od jednej zmiennej, np.

$C = \left(x_C, -\frac{1}{2}x_C + 2\right)$,

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych punktów A

oraz C , np. $x_M = \frac{1}{5}(x_C - x_A) + x_A$ oraz $y_M = \frac{1}{5}(y_C - y_A) + y_A$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający zapisze współrzędne punktu $C = (2, 1)$ oraz uzasadni (np. rachunkowo), że ten punkt spełnia warunki zadania, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli zdający takiego uzasadnienia nie zapisze, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.
- a) Jeżeli zdający przyjmuje $|AM| : |MC| = 4 : 1$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
b) Jeżeli zdający przyjmuje stosunek $|AM| : |MC|$ inny niż $1 : 4$ lub $4 : 1$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że prosta AC jest prostopadła do prostej BC , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie współrzędnych punktu C w zależności od jednej zmiennej lub wyznaczenie/obliczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych punktów A oraz C , oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie zadania do końca).

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(x - \frac{6}{5})^2 + (y + \frac{3}{5})^2 = \frac{16}{5}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu M oraz współrzędnych wektora \overrightarrow{AM} (lub współrzędnych wektora \overrightarrow{MC}): $M = (\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$ oraz $\overrightarrow{AM} = [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$ (lub $\overrightarrow{MC} = [\frac{4}{5}, \frac{8}{5}]$).

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu D oraz wyznaczenie równania prostej ME :

$$D = (\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}) \text{ oraz np. } y = -\frac{1}{2}(x - \frac{8}{5}) - \frac{4}{5}$$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu E oraz wyznaczenie równania prostej MD :

$$E = (\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}) \text{ oraz np. } y = -3(x - \frac{13}{10}) - \frac{9}{10}$$

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów D oraz E : $D = (\frac{13}{10}, -\frac{9}{10})$ oraz

$$E = (\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej MD , np. $y = -3(x - \frac{13}{10}) - \frac{9}{10}$,

ALBO

– wyznaczenie równania prostej ME , np. $y = -\frac{1}{2}(x - \frac{8}{5}) - \frac{4}{5}$.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu D : $D = (\frac{13}{10}, -\frac{9}{10})$

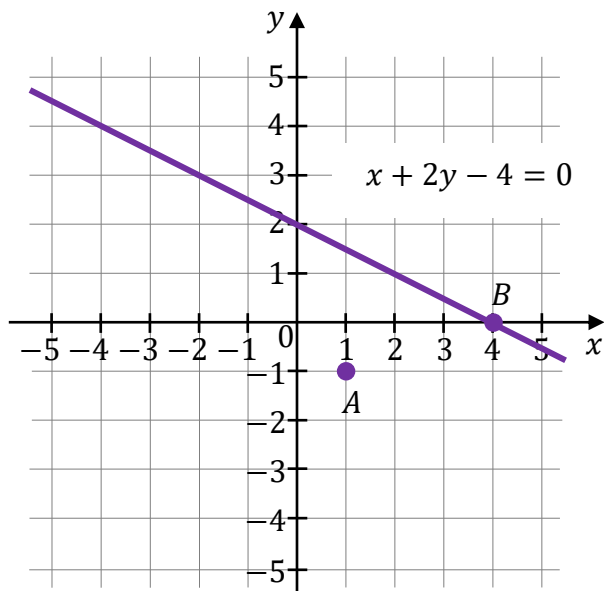
ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu E : $E = (\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Zauważmy, że punkt A nie leży na prostej $x + 2y - 4 = 0$, natomiast punkt B leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię BC trójkąta ABC .



Niech $C = (x_C, y_C)$. Wówczas $y_C = -\frac{1}{2}x_C + 2$. Ponieważ $|CA| = |CB|$, więc

$$|CA|^2 = |CB|^2$$

$$(1 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = (4 - x_C)^2 + (0 - y_C)^2$$

$$1 - 2x_C + x_C^2 + 1 + 2y_C + y_C^2 = 16 - 8x_C + x_C^2 + y_C^2$$

$$6x_C + 2y_C - 14 = 0$$

$$6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0$$

$$x_C = 2$$

Zatem $C = (2, 1)$.

Niech $M = (x_M, y_M)$. Z warunków zadania wynika, że $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$. Obliczamy współrzędne punktu M :

$$[x_M - 1, y_M - (-1)] = \frac{1}{5} \cdot [2 - 1, 1 - (-1)]$$

$$x_M - 1 = \frac{1}{5} \quad \wedge \quad y_M + 1 = \frac{2}{5}$$

Zatem $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M :

$$|MC|^2 = \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M , ma postać

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Sposób II

Niech $D = (x_D, y_D)$ będzie punktem przecięcia prostej AB z prostą, która jest prostopadła do AB i przechodzi przez punkt M .

Niech $E = (x_E, y_E)$ będzie punktem przecięcia prostej AB z prostą, która jest równoległa do BC i przechodzi przez punkt M .

Zauważmy, że punkt A nie leży na prostej $x + 2y - 4 = 0$, natomiast punkt B leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię BC trójkąta ABC .

Z warunków zadania oraz twierdzenia Talesa otrzymujemy:

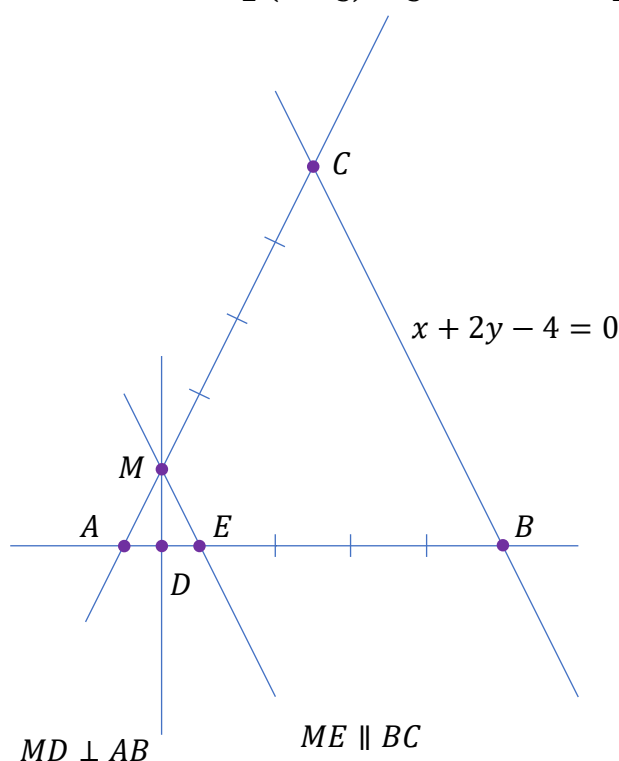
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[x_E - 1, y_E - (-1)] = \frac{1}{5} \cdot [4 - 1, 0 - (-1)]$$

$$x_E - 1 = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad y_E + 1 = \frac{1}{5}$$

Stąd $E = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Zatem prosta ME ma równanie $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{8}{5}\right) - \frac{4}{5}$, czyli $y = -\frac{1}{2}x$.



Ponieważ $ME \parallel BC$, więc trójkąt AME jest równoramienny i $|AM| = |ME|$. Stąd prosta MD jest symetralną odcinka AE . Zatem punkt D dzieli odcinek AB w stosunku $1 : 9$ (licząc od punktu A). Obliczamy współrzędne punktu D :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{10} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[x_D - 1, y_D - (-1)] = \frac{1}{10} \cdot [4 - 1, 0 - (-1)]$$

$$x_D - 1 = \frac{3}{10} \quad \wedge \quad y_D + 1 = \frac{1}{10}$$

$$\text{Stąd } D = \left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right).$$

Współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB jest równy $a_{AB} = \frac{0 - (-1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}$, więc prosta MD ma równanie $y = -3\left(x - \frac{13}{10}\right) - \frac{9}{10}$, czyli $y = -3x + 3$.

Obliczamy współrzędne punktu M :

$$-\frac{1}{2}x = -3x + 3$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$\text{Stąd } M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Z warunków zadania

$$\overrightarrow{MC} = 4 \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \cdot \left[\frac{6}{5} - 1, -\frac{3}{5} - (-1)\right] = \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$$

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M :

$$|\overrightarrow{MC}|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M , ma postać

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Zadanie 13. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 3.2R) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem. 4.12) wykorzystuje własności funkcji kwadratowej liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych [...].

Zasady oceniania (dla *sposobu I*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie wszystkich warunków 1) – 5):

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$),

2) $p > -2$,

3) $p < 2$,

4) $f(-2) > 0$,

5) $f(2) > 0$,

ALBO

– rozwiązanie jednego z warunków 1) – 5):

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$): $m \in (0, +\infty)$,

2) $p > -2$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$,

3) $p < 2$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

4) $f(-2) > 0$: $m \in \mathbb{R}$,

5) $f(2) > 0$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje

0 punktów.

2. Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt albo

b) podczas rozwiązywania warunków 1) – 5) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo

c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania (dla sposobu II)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$.

3 pkt – spełnienie czterech spośród warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$,

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$,

ALBO

– spełnienie warunków III) **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$.

2 pkt – spełnienie warunku I) i jednego z warunków II) – V):

I) wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe oraz wyznaczenie miejsc zerowych x_1 oraz x_2

funkcji f w zależności od m : $m \in (0, +\infty)$ i $x_1 = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$ oraz $x_2 = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$,

II) rozwiązanie nierówności $x_1 < 2$: $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$,

III) rozwiązanie nierówności $-2 < x_1$: $m \in (0, +\infty)$,

IV) rozwiązanie nierówności $x_2 < 2$: $m \in (1, +\infty)$,

V) rozwiązanie nierówności $-2 < x_2$: $m \in (0, +\infty)$,

ALBO

– spełnienie trzech spośród warunków II) – V).

1 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe: $m \in (0, +\infty)$

ALBO

– wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f w zależności od m : $x_1 = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$ oraz

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje

0 punktów.

2. Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków I) – V) określonych w kryterium za 1 punkt albo

b) podczas rozwiązywania warunków I) – V) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo

c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie warunków A) – E):

A) $\Delta > 0$,

B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$,

C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$,

D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$,

E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$,

ALBO

– rozwiązanie jednego z warunków A) – E):

A) $\Delta > 0$: $m \in (0, +\infty)$,

B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$,

C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$: $m \neq 0$,

D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje

0 punktów.

2. Jeżeli zdający:

- a) nie rozwiąże wszystkich warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt albo
- b) podczas rozwiązywania warunków A) – E) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo
- c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I (poprzez interpretację geometryczną)*

Ponieważ $m \neq 0$, więc współczynnik przy x^2 jest dodatni. Zatem parabola, która jest wykresem funkcji f , ma ramiona skierowane ku górze.

Stąd funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy spełnione będą następujące warunki:

- 1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$)
- 2) $p > -2$
- 3) $p < 2$
- 4) $f(-2) > 0$
- 5) $f(2) > 0$.

Rozwiązujemy warunek 1):

$$f(p) < 0$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) < 0$$

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2m \cdot \frac{1}{m} - m + 1 < 0$$

$$-m < 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Warunki 2) oraz 3) można rozwiązać za pomocą nierówności podwójnej:

$$p \in (-2, 2)$$

$$-2 < -\frac{-2m}{2m^2} < 2$$

$$-2 < \frac{1}{m} < 2$$

$$\frac{1}{|m|} < 2$$

$$|m| > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek 4):

$$f(-2) > 0$$

$$m^2 \cdot (-2)^2 - 2m \cdot (-2) - m + 1 > 0$$

$$4m^2 + 3m + 1 > 0$$

$$\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0$$

$$m \in \mathbb{R}$$

Rozwiązujemy warunek 5):

$$f(2) > 0$$

$$m^2 \cdot 2^2 - 2m \cdot 2 - m + 1 > 0$$

$$4m^2 - 5m + 1 > 0$$

$$4(m-1)\left(m - \frac{1}{4}\right) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki 1) – 5) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy $m \in (1, +\infty)$.

Sposób II (poprzez wyznaczenie miejsc zerowych)

Przy $m \neq 0$ funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1, x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$, gdy spełnione są następujące warunki:

- I) $\Delta > 0$
- II) $x_1 < 2$
- III) $-2 < x_1$
- IV) $x_2 < 2$
- V) $-2 < x_2$.

Rozwiązujemy nierówność $b^2 - 4ac > 0$:

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Wtedy miejsca zerowe są równe:

$$x_1 = \frac{2m - 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$$

oraz

$$x_2 = \frac{2m + 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

Rozwiązujemy nierówność $-2 < x_1 < 2$:

$$-2 < \frac{1 - \sqrt{m}}{m} < 2$$

$$(-2m < 1 - \sqrt{m} \wedge m > 0) \wedge (1 - \sqrt{m} < 2m \wedge m > 0)$$

$$(2m - \sqrt{m} + 1 > 0 \wedge m > 0) \wedge (2m + \sqrt{m} - 1 > 0 \wedge m > 0)$$

$$\left(2\left(\sqrt{m} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \wedge m > 0\right) \wedge \left(2(\sqrt{m} + 1)\left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right) > 0 \wedge m > 0\right)$$

$$m > 0 \wedge \left(\left(\sqrt{m} < -1 \vee \sqrt{m} > \frac{1}{2}\right) \wedge m > 0\right)$$

$$m > 0 \wedge \left(m > \frac{1}{4} \wedge m > 0 \right)$$

$$m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty \right)$$

Rozwiązujemy nierówność $-2 < x_2 < 2$:

$$-2 < \frac{1 + \sqrt{m}}{m} < 2$$

$$\left(-2m < 1 + \sqrt{m} \wedge m > 0 \right) \wedge \left(1 + \sqrt{m} < 2m \wedge m > 0 \right)$$

$$\left(2m + \sqrt{m} + 1 > 0 \wedge m > 0 \right) \wedge \left(2m - \sqrt{m} - 1 > 0 \wedge m > 0 \right)$$

$$\left(2 \left(\sqrt{m} + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \wedge m > 0 \right) \wedge \left(2(\sqrt{m} - 1) \left(\sqrt{m} + \frac{1}{2} \right) > 0 \wedge m > 0 \right)$$

$$m > 0 \wedge \left(\left(\sqrt{m} < -\frac{1}{2} \vee \sqrt{m} > 1 \right) \wedge m > 0 \right)$$

$$m > 0 \wedge (m > 1 \wedge m > 0)$$

$$m \in (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki I) – V) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy $m \in (1, +\infty)$.

Uwaga.

Wszystkie wartości m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe oraz te miejsca zerowe, można wyznaczyć również następująco.

$$f(x) = m^2 x^2 - 2mx - m + 1$$

$$f(x) = (mx - 1)^2 - m$$

$$(mx - 1)^2 - m = 0$$

$$(mx - 1)^2 = m$$

Dla $m \leq 0$ to równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych, natomiast dla $m > 0$ otrzymujemy:

$$mx - 1 = -\sqrt{m} \vee mx - 1 = \sqrt{m}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{m}}{m} \vee x_2 = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

Zatem funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wtedy, gdy $m \in (0 + \infty)$.

Sposób III (poprzez wzory Viète'a)

Przy $m \neq 0$ funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1, x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\Delta > 0 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_1 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_2 \quad \wedge \quad 0 < x_1 + 2 \quad \wedge \quad 0 < x_2 + 2$$

Liczby $2 - x_1$ oraz $2 - x_2$ są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie. Liczby $x_1 + 2$ oraz $x_2 + 2$ są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie. Zatem przy $m \neq 0$ funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1, x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wówczas, gdy spełnione są poniższe warunki:

- A) $\Delta > 0$
- B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$
- C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$
- D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$
- E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$.

Rozwiązujemy warunek A), tj. nierówność $b^2 - 4ac > 0$:

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek B), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$$

$$\frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$4m^2 + 2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m + 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek C), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m + 1}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m + 1 + 4m + 4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2 + 3m + 1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \neq 0$$

Rozwiązujemy warunek D), stosując wzory Viète'a:

$$2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$$

$$4 - \frac{2m}{m^2} > 0$$

$$4m^2 - 2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m - 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek E), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m + 1}{m^2} - 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m + 1 - 4m + 4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2 - 5m + 1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$(4m - 1)(m - 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , które jednocześnie spełniają warunki A) – E) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Zadanie 14. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.1R) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zasady oceniania

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $|BC| = 5$ i $|CD| = 6$ oraz $P = 30\sqrt{3}$.

5 pkt – obliczenie długości boków BC oraz CD : $|BC| = 5$ oraz $|CD| = 6$.

4 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku BC lub długością boku CD), np.

$$91 = |BC|^2 + (|BC| + 1)^2 - 2 \cdot |BC| \cdot (|BC| + 1) \cdot \cos 120^\circ,$$

$$91 = \left(|BC| + 1 + \frac{1}{2} \cdot |BC| \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BC| \right)^2$$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi (długościami boków BC i CD),

$$\text{np. } \begin{cases} 9 + |CD| = 10 + |BC| \\ (\sqrt{91})^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos 120^\circ \end{cases}$$

3 pkt – spełnienie wszystkich warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt

ALBO

– spełnienie warunków 1) i 2) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BCD i zapisanie równania

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos|\sphericalangle BCD|,$$

ALBO

– spełnienie warunków 2) i 3) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BCD i zapisanie równania

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos|\sphericalangle BCD|.$$

2 pkt – spełnienie dwóch spośród warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z warunków 1) – 3):

1) zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i zapisanie zależności między długością boku BC a długością boku CD czworokąta, np.
 $9 + |CD| = 10 + |BC|,$

2) zapisanie jednego z dwóch równań: $|BD|^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$ lub

$$|BD|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \right)^2 + (9 - 5)^2,$$

3) zastosowanie twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg i obliczenie miary kąta BCD : 120° .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

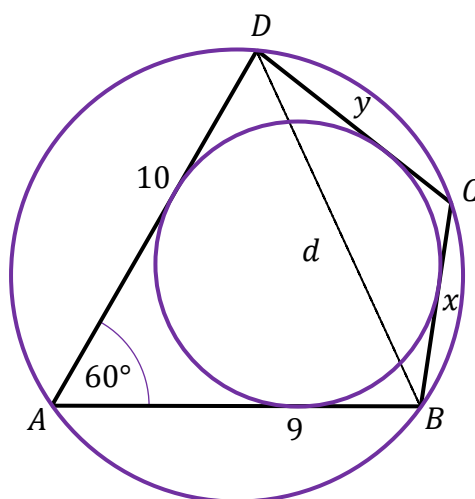
Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów albo
- b) błędne zastosowanie wzoru redukcyjnego, albo
- c) błędne zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu (tj. zapisanie związku $9 \cdot |CD| = 10 \cdot |BC|$ lub $10 + |CD| = 9 + |BC|$), albo
- d) błędne zastosowanie własności miarowych trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° , albo
- e) błędna interpretacja obliczonej długości jednego z dwóch szukanych boków czworokąta,

ale zdający realizuje poprawnie strategię rozwiązania zadania, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów. Jeżeli zdający popełni dodatkowo błędy rachunkowe, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $x = |BC|$, $y = |CD|$, $d = |BD|$ (zobacz rysunek).



Na czworokącie $ABCD$ jest opisany okrąg, więc $60^\circ + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ$, czyli $|\sphericalangle BCD| = 120^\circ$.

W czworokąt $ABCD$ jest wpisany okrąg, więc $9 + y = 10 + x$, czyli $y = x + 1$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD i otrzymujemy

$$d^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BCD i otrzymujemy:

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 120^\circ$$

$$d^2 = x^2 + (x + 1)^2 + 2x(x + 1) \cdot \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = x^2 + (x + 1)^2 + 2x(x + 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 = 3x^2 + 3x - 90$$

$$0 = x^2 + x - 30$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = -6 \notin (0, +\infty)$$

Stąd $|BC| = 5$ i $|CD| = |BC| + 1 = 6$.

Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkątów ABD i BCD .

Obliczamy pole P czworokąta $ABCD$:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

Zadanie 15. (0–7)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.6R) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania**Część a)**

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – spełnienie kryterium zapisanego w pierwszym myślniku w kategorii za 1 punkt **oraz** zapisanie układu co najwyżej trzech równań niezależnych, umożliwiającego wyznaczenie h w zależności od x

ALBO

– wyznaczenie $\operatorname{tg}(2\alpha)$ w zależności od x , np. $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{4rx}{x^2 - 4r^2}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– wyznaczenie zależności między P oraz x , np. $P^2 = \frac{P}{r} \left(\frac{P}{r} - x \right) \cdot \frac{1}{4} x^2$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie związku między h i x oraz jedną z wielkości: długością b ramienia, lub długością odcinka CE , lub długością odcinka CS , np.:

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2, \quad \frac{r}{h-r} = \frac{\frac{1}{2}x}{b}, \quad \frac{1}{2}xh = r \cdot \left(\frac{1}{2}x + b\right),$$

ALBO

– zapisanie związku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}x}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– zapisanie związku $P = \left(b + \frac{x}{2}\right) \cdot r$ lub

$$P = \sqrt{\left(b + \frac{1}{2}x\right) \left(b + \frac{1}{2}x - b\right) \left(b + \frac{1}{2}x - b\right) \left(b + \frac{1}{2}x - x\right)} \quad (\text{dla } \textit{sposobu III}),$$

ALBO

– zapisanie związków $P = \frac{1}{2}b^2 \sin(2\beta)$ oraz $\sin \beta = \frac{r}{h-r}$,

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta ADC (lub trójkąta CES) w zależności od x i h (dla *sposobu IV*),

ALBO

– zapisanie długości przyprostokątnych trójkątów ADC oraz CES w zależności od x i h (dla *sposobu IV*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Kategorie za 1 punkt oraz za 2 punkty oceniamy w sytuacji, gdy zdający posługuje się symbolem r albo przyjmie $r = 2$ lub $r = 4$. Natomiast jeżeli zdający przyjmie promień inny niż 2 lub 4, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Część b)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4\sqrt{3}$ (m), **oraz** obliczenie pola trójkątnego klombu o takiej podstawie: $P(4\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$ (m²).

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji P : $x = 4\sqrt{3}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji P , np. $P'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje

0 punktów za całe rozwiązanie.

2. a) Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $2x^3$ oraz $x^2 - 16$ i dalej

popelnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$ lub

$\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(4, 10]$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji P).

b) Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $2x^3$ lub $x^2 - 16$ i dalej

popelnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$ lub

$\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(4, 10]$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji P).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

ORAZ:

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji P
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

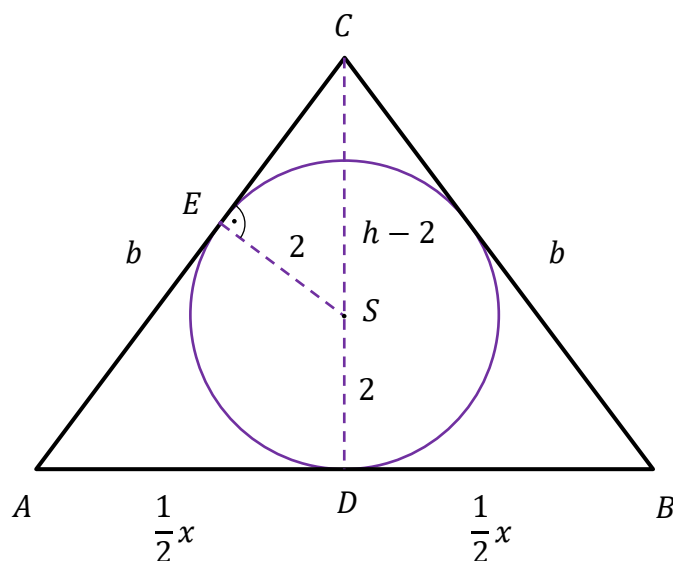
4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w \mathbb{R} lub \mathbb{R}_+ , lub w $(4, +\infty)$, lub w $(0, 10]$, to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązania

a)

Sposób I

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD , w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech S będzie środkiem tego okręgu, natomiast E – punktem styczności tego okręgu z ramieniem AC . Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $b = |AC|$ (zobacz rysunek).



Korzystamy z podobieństwa trójkątów CES i CDA , otrzymując:

$$\frac{|SE|}{|CS|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{2}{h-2} = \frac{\frac{1}{2}x}{b}$$

$$b = \frac{1}{4}x(h-2)$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ADC dostajemy:

$$\begin{aligned}
 b^2 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2 \\
 \left(\frac{1}{4}xh - \frac{1}{2}x\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2 \\
 \frac{1}{16}x^2h^2 - \frac{1}{4}x^2h + \frac{1}{4}x^2 &= \frac{1}{4}x^2 + h^2 \\
 \frac{1}{16}x^2h - \frac{1}{4}x^2 &= h \\
 h\left(\frac{1}{16}x^2 - 1\right) &= \frac{1}{4}x^2 \\
 h(x^2 - 16) &= 4x^2 \\
 h &= \frac{4x^2}{x^2 - 16}
 \end{aligned}$$

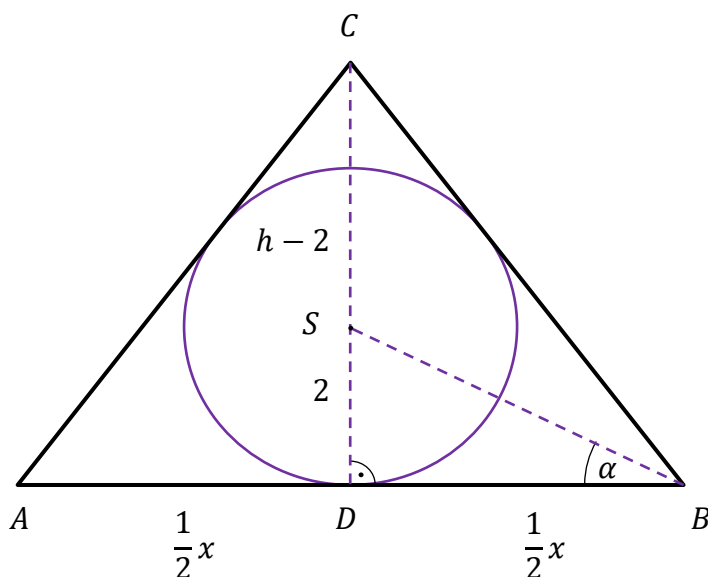
Wyznaczamy pole P trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD , w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech S będzie środkiem tego okręgu. Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle SBD|$ (zobacz rysunek).



Z trójkąta prostokątnego BSD otrzymujemy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{1}{2}x} = \frac{4}{x}$.

Stąd i ze wzoru na tangens podwojonego kąta otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{4}{x}}{1 - \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \frac{8x}{x^2 - 16}$$

Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , więc prosta SB jest dwusieczną kąta CBD . Zatem $\frac{h}{\frac{1}{2}x} = \operatorname{tg}(2\alpha)$, czyli

$$h = \frac{1}{2}x \cdot \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

Wyznaczamy pole P trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

Sposób III

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD , w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Oznaczmy $b = |AC|$ i niech p będzie połową obwodu tego trójkąta.

Wówczas $p = \frac{b + b + x}{2} = b + \frac{1}{2}x$. Stąd i ze wzoru $P = p \cdot r$ otrzymujemy:

$$P = \left(b + \frac{1}{2}x\right) \cdot 2$$

$$b = \frac{P - x}{2}$$

Korzystamy ze wzoru Herona i otrzymujemy:

$$P = \sqrt{p(p - b)(p - b)(p - x)}$$

$$P = \sqrt{\left(b + \frac{1}{2}x\right)\left(b + \frac{1}{2}x - b\right)\left(b + \frac{1}{2}x - b\right)\left(b + \frac{1}{2}x - x\right)}$$

$$P^2 = \left(b + \frac{1}{2}x\right)\left(b - \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

Stąd i ze związku $b = \frac{P - x}{2}$ wyznaczamy pole trójkąta ABC :

$$P^2 = \left(\frac{P - x}{2} + \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{P - x}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P^2 = \frac{1}{2}P \cdot \left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{16}Px^2 - \frac{1}{8}x^3$$

$$16P = Px^2 - 2x^3$$

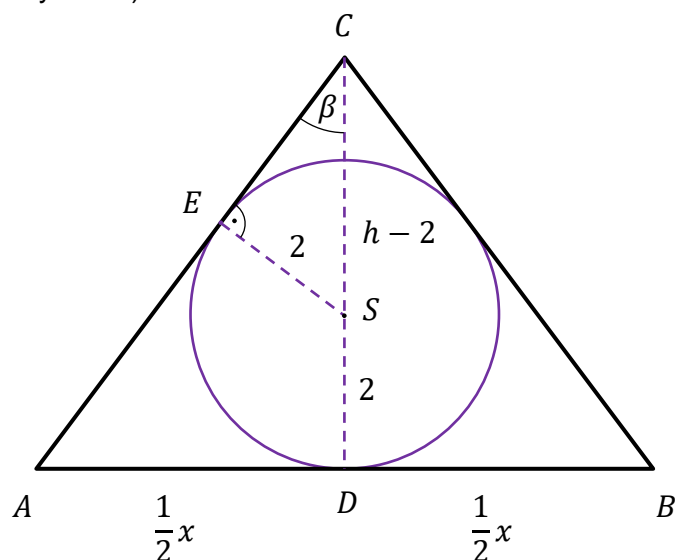
$$2x^3 = Px^2 - 16P$$

$$\frac{2x^3}{x^2 - 16} = P$$

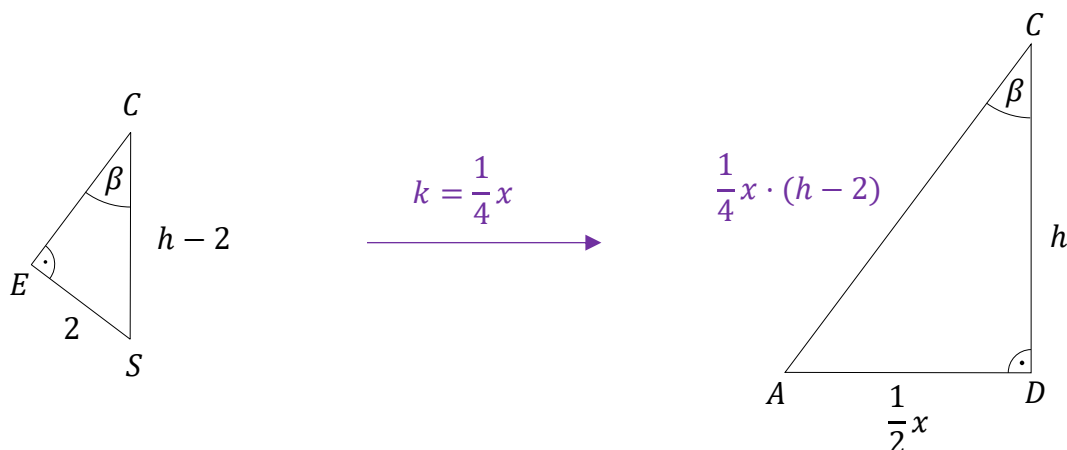
To należało wykazać.

Sposób IV

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD , w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech S będzie środkiem tego okręgu, natomiast E – punktem styczności tego okręgu z ramieniem AC . Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $\beta = |\sphericalangle SCE|$ (zobacz rysunek).



Kąty w trójkątach ADC oraz SEC mają miary 90° , β oraz $90^\circ - \beta$, więc te trójkąty są podobne na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Trójkąt ADC jest podobny do trójkąta SEC w skali $k = \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$. Zatem $|AC| = k \cdot |CS| = \frac{1}{4}x \cdot (h - 2)$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta ADC twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{4}x \cdot (h-2)\right]^2 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2 \\ \left(\frac{1}{4}xh - \frac{1}{2}x\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2 \\ \frac{1}{16}x^2h^2 - \frac{1}{4}x^2h + \frac{1}{4}x^2 &= \frac{1}{4}x^2 + h^2 \\ \frac{1}{16}x^2h - \frac{1}{4}x^2 &= h \\ h\left(\frac{1}{16}x^2 - 1\right) &= \frac{1}{4}x^2 \\ h(x^2 - 16) &= 4x^2 \\ h &= \frac{4x^2}{x^2 - 16} \end{aligned}$$

Wyznaczamy pole P trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

b)

Obliczamy argument, dla którego funkcja P określona wzorem $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$

dla $x \in (4, 10]$ osiąga wartość najmniejszą.

Wyznaczamy pochodną funkcji P : $P'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2}$

dla $x \in (4, 10]$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P :

$$P'(x) = 0$$

$$\frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} = 0$$

$$2x^2(x^2 - 48) = 0$$

$$x = 0 \notin (4, 10] \vee x = -4\sqrt{3} \notin (4, 10] \vee x = 4\sqrt{3} \in (4, 10]$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(x) < 0$$

$$\frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} < 0 \wedge x \in (4, 10]$$

$$x^2(x^2 - 48) < 0 \wedge x \in (4, 10]$$

$$x^2 < 48 \wedge x \in (4, 10]$$

$$x \in (4, 4\sqrt{3})$$

więc $P'(x) < 0$ dla $x \in (4, 4\sqrt{3})$ oraz $P'(x) > 0$ dla $x \in (4\sqrt{3}, 10]$.

Zatem funkcja P jest malejąca w przedziale $(4, 4\sqrt{3}]$ i rosnąca w przedziale $[4\sqrt{3}, 10]$.

Stąd funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla $x = 4\sqrt{3}$ (m). Wtedy

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (4\sqrt{3})^3}{(4\sqrt{3})^2 - 16} = 12\sqrt{3} \quad (m^2)$$

Uwaga.

Funkcja P jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto $\lim_{x \rightarrow 4^+} P(x) = +\infty$ oraz

$\lim_{x \rightarrow 10^-} P(x) = \frac{500}{21}$, więc uwzględniając wartość funkcji P w punkcie stacjonarnym

$x = 4\sqrt{3}$ równą $P(4\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$, można sformułować wniosek, że funkcja P osiąga wartość najmniejszą równą $12\sqrt{3}$ dla argumentu $x = 4\sqrt{3}$.