CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | **PESEL**

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2605

DATA: **11 maja 2026 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

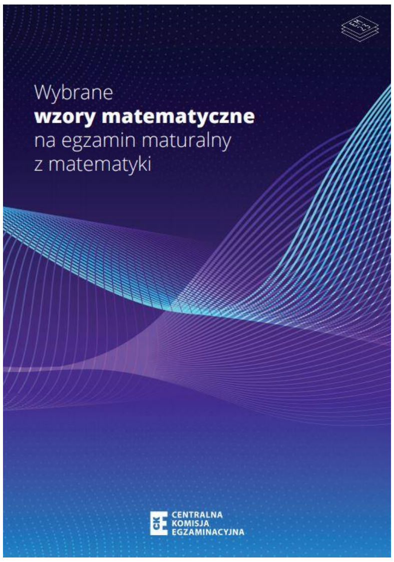
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 33 strony (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu/pióra z czarnym tuszem/atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki są umieszczone na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.**

Zadanie 1. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3-4n+7}$$

Zapisz obliczenia.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3-4n+7}$$

1) $\binom{n+2}{n-1}=\frac{(n+2)!}{(n-1)!\,(n+2-(n-1))!}=\frac{(n+2)!}{(n-1)!\,(n+2-n+1)!}=$

$=\frac{\cancel{(n-1)!}\cdot n\cdot(n+1)(n+2)}{\cancel{(n-1)!}\cdot 3!}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{6}(n^2+n)(n+2)}{\frac{1}{2}n^3-4n+7}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{6}(n^3+2n^2+n^2+2n)}{\frac{1}{2}n^3-4n+7}=$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n}{\frac{1}{2}n^3-4n+7}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}=$

$0\left[\frac{1}{\infty}\right]$ $0\left[\frac{1}{\infty}\right]$ $0\left[\frac{4}{\infty}\right]$ $0\left[\frac{7}{\infty}\right]$

$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ //

Zadanie 2. (0–3)

Ze zbioru ośmiu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzielną przez 3. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Zapisz obliczenia.

2.
0–1–2–3

$|\Omega| = 8! = 40320$

Iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów musi być liczbą podzielną przez 3. Wynika stąd, że wśród każdych trzech kolejnych liczb jedna musi być wielokrotnością liczby 3.

$X = \{3; 6\}$ $\quad Y = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

X – liczby podzielne przez 3
Y – pozostałe liczby

Jedyny możliwy układ wylosowanego ciągu to: YYXYYXYY.

Zatem:

$|A| = 2! \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440$

$2!$ – ustawienia cyfr ze zbioru $X = \{3; 6\}$
$6!$ – ustawienia cyfr ze zbioru $Y = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1440}{40320} = \frac{1}{28}$

Zadanie 3. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2} \quad |\cdot x^2y^2, \quad x,y>0$

$xy^2+x^2y\le x^3+y^3 \qquad x,y\in\mathbb{R}$

$x^3+y^3\geq xy^2+x^2y$

$x^3+y^3-xy^2-x^2y\geq 0$

$x^3-xy^2+y^3-x^2y\geq 0$

$x(x^2-y^2)+y(y^2-x^2)\geq 0$

$x(x^2-y^2)-y(x^2-y^2)\geq 0$

$(x+y)(x^2-y^2)\geq 0$

$(x-y)(x^2-y^2)\geq 0$

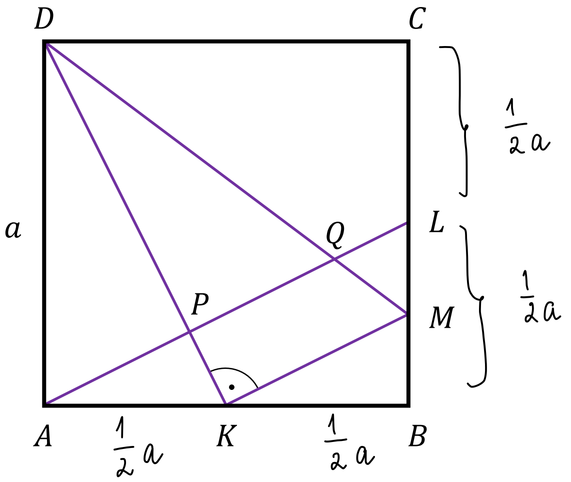
$(x-y)(x-y)(x+y)\geq 0$

$\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x+y)}_{>0}\geq 0$

Pierwszy nawias jest nieujemny jako kwadrat liczby rzeczywistej. Drugi nawias jest dodatni jako suma liczb dodatnich. Iloczyn liczby nieujemnej i dodatniej jest nieujemny c.k.d.

Zadanie 4. (0–3)

Punkty K i L są środkami – odpowiednio – boków AB i BC kwadratu $ABCD$ o boku długości a. Punkt M jest takim punktem na boku BC, że odcinki DK i KM są prostopadłe.
Odcinek AL przecina odcinki DK oraz DM w punktach – odpowiednio – P oraz Q (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

1) Niech $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$, $D(0;a)$

$K\left(\frac{a}{2};0\right)$ $L\left(a,\frac{a}{2}\right)$

2) Wiemy, że $DK \perp KM$, a $M=(a, y_M)$

$\overrightarrow{KD} = \left[0-\frac{a}{2}; a-0\right] = \left[-\frac{a}{2}; a\right]$

$\overrightarrow{KM} = \left[a-\frac{a}{2}; y_M - 0\right] = \left[\frac{a}{2}; y_M\right]$

z warunku prostopadłości

$\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$

$-\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + a\cdot y_M = 0 \quad |\cdot 4$

$-a^2 + 4ay_M = 0$

$y_M = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$

zatem $M = \left(a; \frac{a}{4}\right)$

3) Wyznaczamy równania prostych zawierających odcinki AL, DK oraz DM

AL: $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow \begin{cases} (0; 0) \\ (a; \frac{a}{2}) \end{cases}$ współczynnik kierunkowy $= \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

DK: $y = -2x + a \Rightarrow \begin{cases} (0, a) \\ (\frac{a}{2}; 0) \end{cases}$ współczynnik kierunkowy $= \frac{-a}{\frac{a}{2}} = -2$

DM: współczynnik kierunkowy $= \frac{\frac{3}{4}a}{a} = \frac{3}{4}$

$(0; a)$
$(a, \frac{a}{4})$ $y = \frac{3}{4}x + a$

4) Wyznaczamy punkt P przecięcia AL i DK

$\frac{1}{2}x = -2x + a$

$\frac{5}{2}x = a$

$x = \frac{2}{5}a$

$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}a = \frac{1}{5}a$

$\Downarrow$

$P(\frac{2}{5}a; \frac{1}{5}a)$

5) Wyznaczamy punkt Q przecięcia DK i DM

$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + a$

$\frac{5}{4}x = a$

$x = \frac{4}{5}a$

$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}a = \frac{2}{5}a \Rightarrow Q(\frac{4}{5}a; \frac{2}{5}a)$

6) Obliczamy długość odcinka PQ

$$|PQ| = \sqrt{(\frac{4}{5}a - \frac{2}{5}a)^2 + (\frac{2}{5}a - \frac{1}{5}a)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{\frac{4}{25}a^2 + \frac{1}{25}a^2} = \sqrt{\frac{5}{25}a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}a}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

c.n.d

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$|2x-6|-|x^2-9|<0$$

Zapisz obliczenia.

$|2x-6| - |x^2-9| < 0$

$2|x-3| - |(x-3)(x+3)| < 0$

$2|x-3| - |x-3|\cdot|x+3| < 0$

$\underbrace{|x-3|}_{>0}\cdot(2-|x+3|) < 0$

dla każdego $x \in \mathbb{R}-\{3\}$ więc:

$2-|x+3|<0$

$|x+3|>2$

$x+3>2 \quad \vee \quad x+3<-2$

$x>-1 \quad \vee \quad x<-5$

$x \in (-\infty;-5) \cup (-1;3) \cup (3;+\infty)$

Zadanie 6. (0–4)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a ostatni wyraz tego ciągu jest równy (-2025). Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

$n > 6$

$a_1 = 1$ $\qquad$ $S_n = ?$

$a_n = -2025$

(a_2, a_3, a_6) — ciąg geometryczny

$a_2 = a_1 + r = 1 + r$ $\qquad$ $a_3 = a_1 + 2r = 1 + 2r$ $\qquad$ $a_6 = a_1 + 5r = 1 + 5r$

z własności ciągu geometrycznego

$$(1+2r)^2 = (1+r)(1+5r)$$

$$1 + 4r + 4r^2 = 1 + 5r + r + 5r^2$$

$$4r^2 - 5r^2 + 4r - 5r - r = 0$$

$$-r^2 - 2r = 0$$

$$-r(r+2) = 0$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = -2$$

$r = 0$ nie spełnia warunków zadania, bo $a_n = -2025$, $a_1 = 1$

$$a_n = -2025$$

$$a_1 + (n-1)\cdot r = -2025$$

$$1 + (n-1)\cdot(-2) = -2025$$

$$1 - 2n + 2 = -2025$$

$$n = 1014$$

$$S_{1014} = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{1-2025}{2}\cdot 1014 = \frac{-2024}{2}\cdot 1014 = -1012\cdot 1014 = -1\,026\,168$$

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$$

$$\sin(6x) - \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$2\cos\frac{6x+2x}{2} \cdot \sin\frac{6x-2x}{2} - \sin(2x) = 0$$

$$2\cos(4x) \cdot \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) \cdot \left[2\cos(4x) - 1\right] = 0$$

$\sin(2x) = 0$

$2x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

$2\cos(4x) - 1 = 0$

$\cos(4x) = \frac{1}{2}$

$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

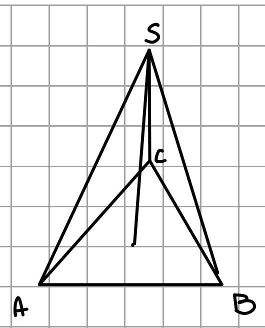
$$x \in \left\{ \frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2};\ -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

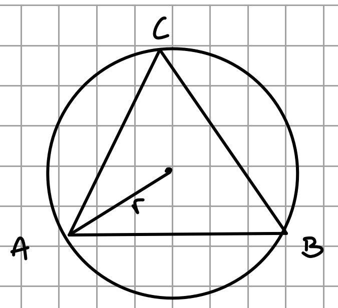
$k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 8. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym. Długość okręgu opisanego na podstawie ABC jest równa $6\sqrt{2}\pi$, a cosinus kąta między krawędziami bocznymi SB i SC jest równy $\frac{5}{9}$.

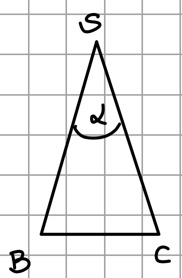
Oblicz długość krawędzi podstawy ABC oraz cosinus kąta między ścianami bocznymi SAC i SBC tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.





$L = 6\sqrt{2}\pi$

1)



$\cos\alpha = \frac{5}{9}$

$a = ?$

$L = 6\sqrt{2}\pi = 2\pi r \quad | : 2\pi$

$3\sqrt{2} = r$

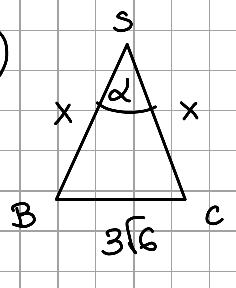
$r = \frac{2}{3}h = 3\sqrt{2}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \quad | \cdot 3$

$a\sqrt{3} = 9\sqrt{2}$

$a = \frac{9\sqrt{6}}{3} = 3\sqrt{6}$

2)



Z twierdzenia cosinusów

$(3\sqrt{6})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos\alpha$

$9 \cdot 6 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \frac{5}{9}$

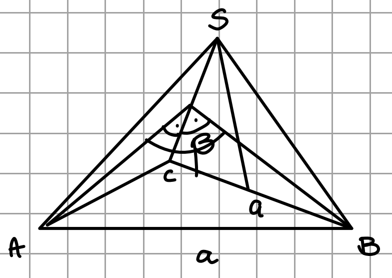
$54 = 2x^2 - \frac{10}{9}x^2 \quad | \cdot 9$

$486 = 18x^2 - 10x^2 = 8x^2 \quad | : 8$

$60{,}75 = x^2$

$\sqrt{60\frac{3}{4}} = x = \sqrt{\frac{243}{4}} = \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

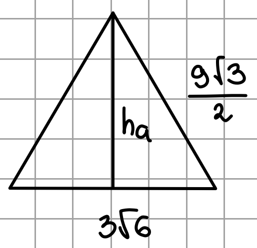
3) Kąt między ścianami to kąt β (zobacz rysunek)



Kąt β to kąt między wysokościami h_S opuszczonymi z wierzchołków A i B na bok CS.

Skorzystamy ze wzorów na pole trójkąta SBC.

$$P_{SBC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot h_S\cdot |SC|$$



$$h_a^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h_a^2 + \frac{54}{4} = \frac{243}{4}$$

$$h_a^2 = \frac{189}{4}$$

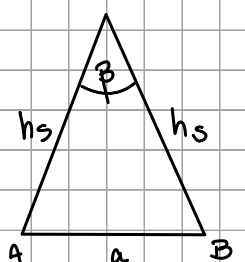
$$h_a = \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot h_S\cdot |SC|$$

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{6}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{2} = \frac{1}{2}\cdot h_S\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2} \quad |\cdot 4$$

$$3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{21} = h_S\cdot 9\sqrt{3} \quad |:9\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = h_S = \sqrt{42}$$



Z twierdzenia cosinusów

$$a^2 = h_S^2 + h_S^2 - 2\cdot h_S\cdot h_S\cdot\cos\beta$$

$$(3\sqrt{6})^2 = 2\cdot\sqrt{42}^2 - 2\cdot 42\cdot\cos\beta$$

$$54 = 2\cdot 42 - 84\cos\beta$$

$$-30 = -84\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{5}{14}$$

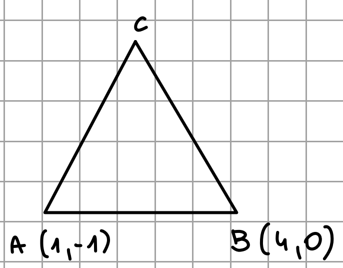
Odp: Krawędź podstawy wynosi $3\sqrt{6}$, a cosinus kąta między ścianami bocznymi jest równy $\frac{5}{14}$

Zadanie 9. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (1, -1)$ oraz $B = (4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, w którym $|CA| = |CB|$. Jedno z ramion trójkąta ABC zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$. Na boku AC tego trójkąta obrano taki punkt M, że $|AM| : |MC| = 1 : 4$.

Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie M i przechodzi przez punkt C. Zapisz obliczenia.

$A = (1, -1)$
$B = (4, 0)$



$|AC| = |BC|$

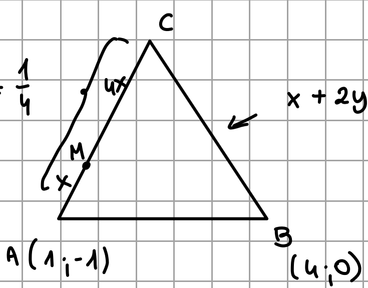
1) Sprawdzamy, czy punkt A należy do prostej $x + 2y - 4 = 0$

$1 + 2\cdot(-1) - 4 = 0$
$1 - 2 - 4 = 0$ Nie

2) Sprawdzamy, czy punkt B należy do prostej $x + 2y - 4 = 0$

$4 \cdot 2 \cdot 0 - 4 = 0$ Tak

bo $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{1}{4}$



$x + 2y - 4 = 0 \iff x = -2y + 4$
$x = 4 - 2y$

3) Niech $C = (4 - 2y, y)$

4) Wiemy, że $|AC| = |BC|$

$\sqrt{(1-4+2y)^2 + (-1-y)^2} = \sqrt{(4-4+2y)^2 + (0-y)^2} \quad |\cdot(\ )^2$

$(2y-3)^2 + (1+y)^2 = 4y^2 + y^2$

$4y^2 - 12y + 9 + 1 + 2y + y^2 = 5y^2$

$-10y = -10$

$y = 1$ Zatem $C = (2;1)$

5) Wyznaczamy współrzędne wektora

$$\overrightarrow{AC} = [2-1 ; 1-(-1)] = [1;2]$$

$$M = A + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \left(1 + \frac{1}{5}\cdot 1 ; -1 + \frac{1}{5}\cdot 2\right) = \left(\frac{6}{5} ; -\frac{3}{5}\right)$$

6) Punkt M to środek okręgu, który przechodzi przez punkt $C(2;1)$

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = r^2$$

$$\left(2 - 1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = r^2$$

$$\frac{16+64}{25} = r^2$$

$$r^2 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$$

$$r = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

7) Równanie okręgu

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$.
Zapisz obliczenia.

$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$

1) $\Delta > 0$ – dwa różne miejsca zerowe

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m+1) > 0$$
$$4m^2 + 4m^3 - 4m^2 > 0$$
$$4m^3 > 0$$
$$m > 0$$

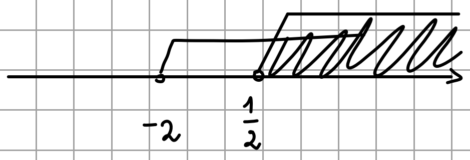
2) wierzchołek $p = \frac{-b}{2a}$ musi leżeć między -2 a 2.

$$p = \frac{2m}{2m^2} = \frac{1}{m}$$

$$-2 < \frac{1}{m} < 2 \quad |\cdot m$$
$$-2m < 1 < 2m$$

ponieważ z I warunku $m > 0$ możemy pomnożyć przez m bez zmiany znaków.

$$-2m < 1 \quad \wedge \quad 1 < 2m$$
$$m > -\frac{1}{2} \qquad 2m > 1$$
$$m > \frac{1}{2}$$



$m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

3) Skoro $a = m^2$ jest zawsze dodatnie (dla $m \neq 0$), to parabola ma ramiona skierowane do góry

Aby miejsca zerowe były wewnątrz przedziału wartości funkcji na „krańcach" muszą być dodatnie:

$$f(-2) > 0 \quad i \quad f(2) > 0$$

$f(-2) > 0$

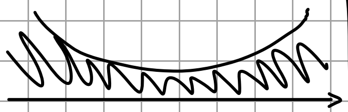
$m^2 \cdot (-2)^2 - 2m(-2) - m + 1 > 0$

$4m^2 + 4m - m + 1 > 0$

$4m^2 + 3m + 1 > 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9 - 16 = -7$

$\Delta_m < 0$



$m \in \mathbb{R}$

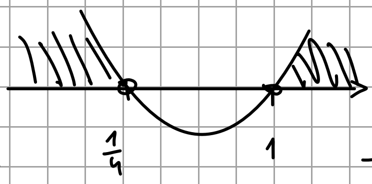
$m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; \infty)$

$f(2) > 0$

$4m^2 - 4m - m + 1 > 0$

$4m^2 - 5m + 1 > 0$

$\Delta_m = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$



$m_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$ $\quad m_2 = \frac{5+3}{8} = 1$

4) Część wspólna wszystkich warunków

1) $m > 0$

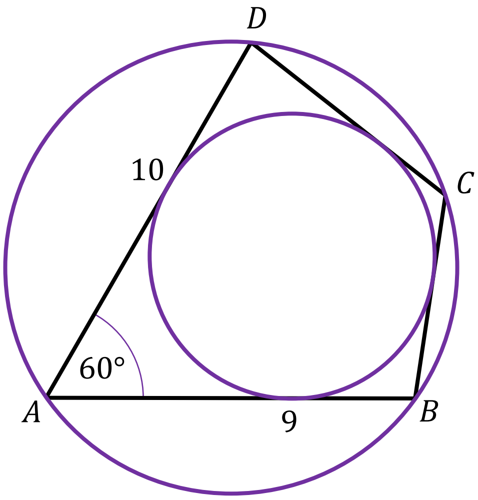
2) $m > \frac{1}{2}$

3) $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; \infty)$

Odp: $m \in (1; \infty)$

Zadanie 11. (0–6)

W czworokącie $ABCD$ są dane: $|AB| = 9$, $|AD| = 10$ oraz $|\sphericalangle BAD| = 60°$.
W ten czworokąt wpisano okrąg oraz na tym czworokącie opisano okrąg (zobacz rysunek).



$|BC| = ?$

$|CD| = ?$

$P_{ABCD} = ?$

Oblicz długości boków BC i CD <u>oraz</u> pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

1) Z warunków wpisywalności okręgu w czworokąt

$9 + y = x + 10$
$x - y = -1$
$y - x = 1 \Rightarrow y = x + 1$

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

2) Z twierdzenia cosinusów w $\triangle ABD$

$|BD|^2 = 100 + 81 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \underbrace{\cos 60°}_{= \frac{1}{2}}$

$|BD|^2 = 181 - 90 = 91$

3) Z twierdzenia cosinusów w $\triangle BCD$ ($|\sphericalangle BCD| = 120°$ warunek opisywalności okręgu na czworokącie)

$91 = x^2 + y^2 + 2xy \cdot \frac{1}{2}$

podstawiamy $y = x + 1$

$91 = x^2 + (x+1)^2 + x \cdot (x+1)$
$91 = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x$
$91 = 3x^2 + 3x + 1$
$3x^2 + 3x - 90 = 0 \quad |:3$
$x^2 + x - 30 = 0$
$(x+6)(x-5) = 0$

$x = -6$ — < 0 odpada

$x = 5$, czyli $y = 6$

4) $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD}$

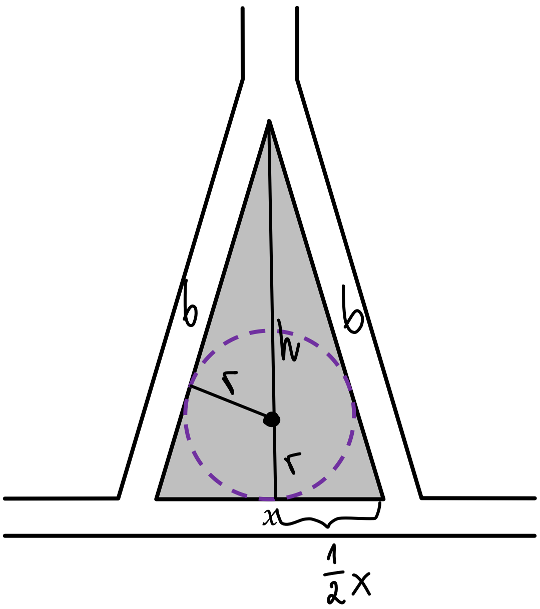
$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{2}$

$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

$P_{ABCD} = \frac{45\sqrt{3}}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{60\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$ //

Zadanie 12.

W projekcie ogrodu zaplanowano kwietnik w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie długości x metrów nieprzekraczającej 10 metrów. Na tym kwietniku ma znajdować się fontanna w kształcie koła o średnicy 4 metrów, które ma być styczne do każdego z boków trójkątnego kwietnika (zobacz rysunek). Projektantowi zależy, aby przy tak ustalonej wielkości fontanny pole tego kwietnika było najmniejsze.



Zadanie 12.1. (0–3)

Wykaż, że pole P (wyrażone w metrach kwadratowych) trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

1) $r = 2$ $\quad P = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$

$P = p \cdot r$ gdzie $p = \frac{1}{2}$ obw

$p = \frac{1}{2} \cdot (x + 2b)$

zatem $P = \frac{1}{2} \cdot (x + 2b) \cdot 2 = x + 2b$

2) z twierdzenia Pitagorasa dla połowy trójkąta

$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2 = b^2$

$\frac{1}{4}x^2 + h^2 = b^2 \quad | \sqrt{\ }, \ b > 0$

$b = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + h^2}$

3) $\frac{1}{2}x\cdot h = x + 2b$

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot h = x + 2\cdot\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}$

$\frac{1}{2}xh - x = 2\cdot\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}$

$x\left(\frac{1}{2}h-1\right) = 2\cdot\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}} \quad |:x \quad , \quad x>0$

$\frac{1}{2}h - 1 = \frac{2}{x}\cdot\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}} \quad |^2$

$\frac{1}{4}h^2 - h + 1 = \frac{4}{x^2}\left(h^2+\frac{x^2}{4}\right)$

$\frac{1}{4}h^2 - h + 1 = \frac{4h^2}{x^2} + 1 \quad |-1$

$\frac{1}{4}h^2 - h = \frac{4h^2}{x^2} \quad |:h \quad , \quad h>0$

$\frac{1}{4}h - \frac{4h}{x^2} = 1$

$h\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{x^2}\right) = 1$

$h\left(\frac{x^2-16}{4x^2}\right) = 1$

$h = \frac{4x^2}{x^2-16}$

4) $P = \frac{1}{2}\cdot x\cdot h$

$P(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{4x^2}{x^2-16} = \frac{2x^3}{x^2-16}$

$x^2 - 16 > 0$ ← mianownik musi być dodatni gdyż $x>0$ czyli $x^3>0$

$x^2 > 16$

$|x| > 4$

$x > 4 \quad \wedge \quad x < -4$

$D = (4;10]$

Zadanie 12.2. (0–4)

Pole P trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

dla każdego $x \in (4, 10]$.

Wyznacz długość x podstawy trójkątnego kwietnika, dla której pole tego kwietnika jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

$$P'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2-16) - (2x^3) \cdot (2x)}{(x^2-16)^2} = \frac{6x^4 - 96x^2 - 4x^4}{(x^2-16)^2} = \frac{2x^4 - 96x^2}{(x^2-16)^2}$$

$P'(x) = 0 \iff 2x^4 - 96x^2 = 0$

$2x^2(x^2 - 48) = 0$

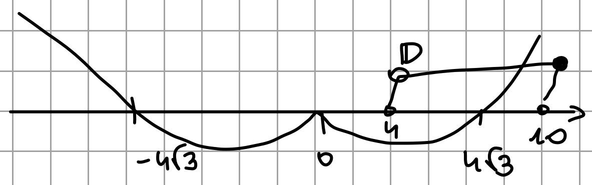
$2x^2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 48 = 0$

$x = 0 \qquad x^2 = 48 \quad |\sqrt{\ }, \ x > 0$

$x = 48$

$x = 4\sqrt{3} \quad \vee \quad x = -4\sqrt{3}$

$2x^2(x - 4\sqrt{3})(x + 4\sqrt{3}) = 0$



Dla $x \in (4; 4\sqrt{3})$ licznik $2x^2(x^2 - 48)$ jest ujemny, więc funkcja $P(x)$ jest malejąca

Dla $x \in (4\sqrt{3}; 10]$ licznik jest dodatni, więc funkcja $P(x)$ jest rosnąca

Skoro funkcja najpierw maleje, a potem rośnie, to dla $x = 4\sqrt{3}$ przyjmuje minimum lokalne, które w tym przedziale jest jednocześnie wartością najmniejszą.

Pole kwietnika będzie najmniejsze dla podstawy o długości $x = 4\sqrt{3}$ m.

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (4\sqrt{3})^3}{(4\sqrt{3})^2 - 16} = \frac{2 \cdot 64 \cdot 3\sqrt{3}}{16 \cdot 3 - 16} = \frac{2 \cdot \cancel{64}^{2} \cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{32}_{1}} = 12\sqrt{3}$$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023