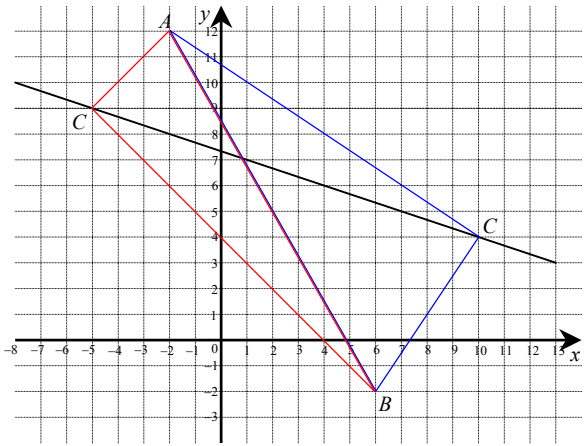
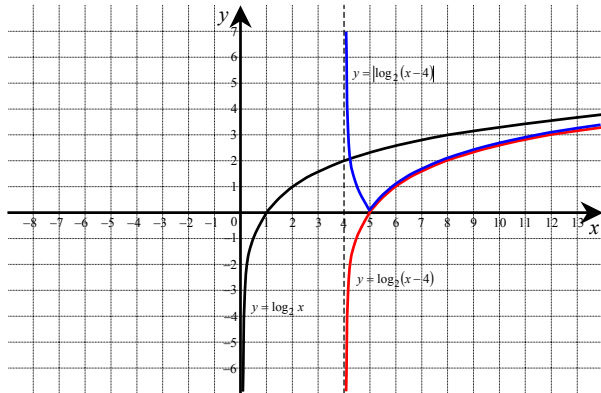


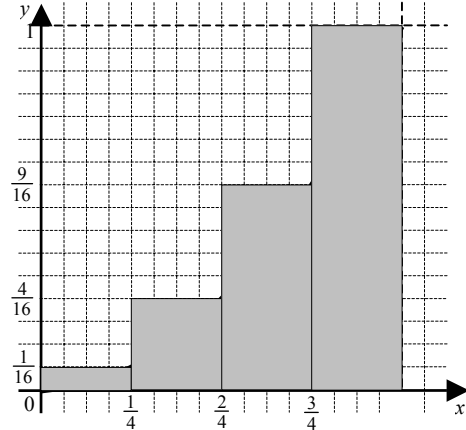
ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA – ZESTAW NR 1
POZIOM ROZSZERZONY

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów	Uwagi
	1.1	I metoda rozwiązania („PITAGORAS”): Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych: np. 	1	<ul style="list-style-type: none"> Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty A i B. Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione. Współrzędne punktu C można odczytać z rysunku, ale zdający musi sprawdzić, np. przez wstawienie do równania prostej prawidłowość odczytu. Przyznajemy pełną pulę punktów. W przypadku, gdy zdający poda odczytane współrzędne punktu C i nie dokona sprawdzenia z warunkami zadania otrzymuje punkty tylko w czynnościach 1.1 i 1.5.
	1.2	Wprowadzenie oznaczenia współrzędnych punktu C, np. $C = (22 - 3y, y)$ lub $C = (x, -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3})$.	1	
	1.3	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie warunku prostopadłości odcinków AC i BC: $ AC ^2 + BC ^2 = AB ^2$, w którym $ AC ^2 = 10y^2 - 168y + 720$, $ BC ^2 = 10y^2 - 92y + 260$, $ AB ^2 = 260$ lub $ AC ^2 = \frac{1}{9}(10x^2 + 64y + 232)$, $ BC ^2 = \frac{1}{9}(10x^2 - 164 + 1108)$.	1	
	1.4	Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą: np. $y^2 - 13y + 36 = 0$ lub $x^2 - 5x - 50 = 0$.	1	
	1.5	Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C = (10, 4)$ lub $C = (-5, 9)$.	1	

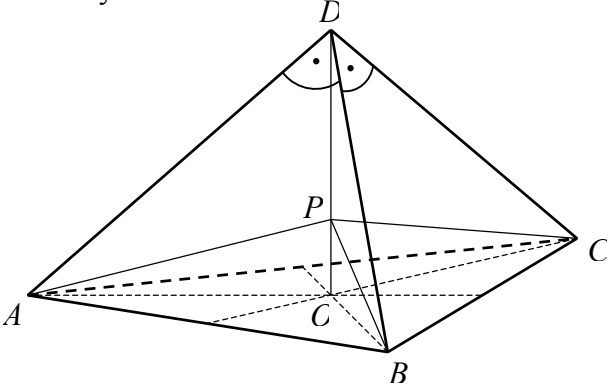
1.1	II metoda rozwiązania („WEKTORY”): Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych.	1	Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty A i B . Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione.
1.2	Wprowadzenie oznaczeń pomocniczych i wyznaczenie wektorów: np. $C = (22 - 3y, y)$, $\vec{CA} = [-24 + 3y, 12 - y]$, $\vec{CB} = [-16 + 3y, -2 - y]$ lub $C = (x, -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3})$, $\vec{CA} = [-2 + x, \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}]$, $\vec{CB} = [6 - x, \frac{1}{3}x - \frac{28}{3}]$.	1	
1.3	Wykorzystanie warunku prostokątności wektorów $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ i zapisanie równania: np. $(-24 + 3y)(-16 + 3y) + (12 - y)(-2 - y) = 0$, gdzie y to rzędna punktu C lub $-(2 + x)(6 - x) + \frac{1}{9}(x + 14)(x - 28) = 0$, gdzie x to odcięta punktu C .	1	
1.4	Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą: np. $y^2 - 13y + 36 = 0$ lub $x^2 - 5x - 50 = 0$.	1	
1.5	Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C = (10, 4)$ lub $C = (-5, 9)$.	1	
1.1	III metoda rozwiązania („KONSTRUKCJA”): Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych.	1	Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty A i B . Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione.
1.2	Zapisanie równania okręgu o środku w punkcie $S = (2, 5)$, który jest środkiem odcinka AB i promieniu $r = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\sqrt{260}$: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{260}\right)^2$.	1	
1.3	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x + 3y = 22 \\ (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{260}\right)^2 \end{cases}$	1	
1.4	Doprowadzenie obliczeń do postaci równania kwadratowego, np.: $y^2 - 13y + 36 = 0$ lub $x^2 - 5x - 50 = 0$.	1	

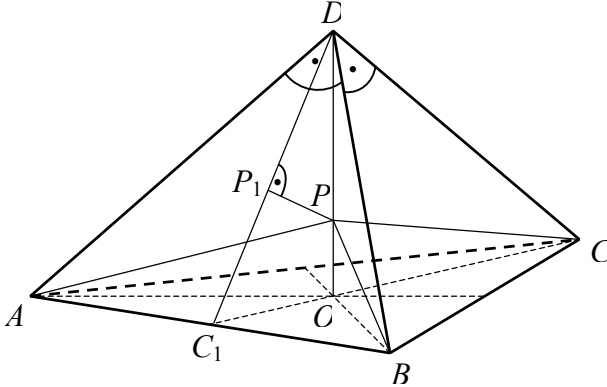
	1.5	Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C = (10, 4)$ lub $C = (-5, 9)$.	1	
	Ogólnie, rozwiązanie powinno mieć postać:			
	1.1	Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych.	1	
	1.2	Przedstawienie metody pozwalającej wyznaczyć punkt C.	1	W metodzie II i III przedstawione zostały czynności 1.2 i 1.3 i zapisane w kolejności takiej, jaka będzie miała miejsce w trakcie rozwiązania tą metodą.
	1.3	Zapisanie warunków algebraicznych wynikających z obranej metody rozwiązania.	1	
	1.4	Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą.	1	
2	1.5	Wyznaczenie współrzędnych punktów C.	1	
	2.1	Zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = \frac{a}{x+3} + 2$ dla $x \neq -3$.	1	Przyznajemy punkt również wtedy, gdy zdający nie zapisze dziedziny funkcji g .
	2.2	Wyznaczenie współczynnika a z równania $g(-4) = 6$: $a = -4$.	1	
	2.3	Doprowadzenie nierówności $\frac{-4}{x+3} + 2 < 4$ do postaci $\frac{-2x-10}{x+3} < 0$.	1	
	2.4	Wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $g(x) < 4$: $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$.	1	
3	3.1	Zapisanie podstawy logarytmu: $p = 2$.	1	
	3.2	Obliczenie wartości funkcji f dla argumentu $x = 0,125$: $f(0,125) = -3$.	1	
	3.3	Narysowanie wykresu funkcji $y = f(x-4)$.	1	
	3.4	Narysowanie wykresu funkcji g 	1	W tej czynności oceniamy poprawność wykonania przekształcenia $y = f(x) $. Punkt przyznajemy również wtedy, gdy zdający niepoprawnie wykona przesunięcie, ale poprawnie wykona przekształcenie $y = f(x) $. Jeśli zdający od razu narysuje wykres funkcji g , to przyznajemy punkt w czynnościach 3.3 i 3.4.

	3.5	Podanie miejsca zerowego funkcji g : $x = 5$.	1	Czynność 3.5 oceniamy konsekwentnie do uzyskanej przez zdającego funkcji g .
4	4.1	Wyrażenie funkcji $\operatorname{tg} \alpha$ w zależności od a i H : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{H} = \frac{a}{2H}$.	1	
	4.2	Wyrażenie funkcji $\cos \alpha$ w zależności od a i h : $\cos \alpha = \frac{h}{a}$.	1	
	4.3	Wykorzystanie wyznaczonych zależności i doprowadzenie podanego w treści zadania związku $a^2 = H \cdot h$ do zależności z jedną zmienną α : np. $\frac{a}{2} = \operatorname{tg} \alpha$ stąd $H = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$, $\frac{h}{a} = \cos \alpha$ stąd $h = a \cos \alpha$; po podstawieniu otrzymujemy $2 \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha$.	1	
	4.4	Doprowadzenie zależności do postaci równania, w którym jest tylko jedna funkcja trygonometryczna, np.: $2 \sin \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ dla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.	1	
	4.5	Rozwiązanie równania, np. dokonanie podstawienia $t = \sin \alpha$ i rozwiązanie równania kwadratowego $t^2 + 2t - 1 = 0$: $t = -1 - \sqrt{2}$ oraz $t = -1 + \sqrt{2}$.	1	
	4.6	Odrzucenie ujemnego pierwiastka i podanie odpowiedzi: $\sin \alpha = \sqrt{2} - 1$.	1	Jeśli zdający nie wskaże właściwego rozwiązania spełniającego warunki zadania, to nie otrzymuje punktu za tę czynność.
	4.3	II sposób rozwiązania (czynności 4.3 i 4.4) Zapisanie wyrażenia $a^2 = H \cdot h$ w postaci proporcji $\frac{a}{H} = \frac{h}{a} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{H} = \frac{h}{a}$.	1	
	4.4	Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych do zapisania proporcji w postaci równania jednej zmiennej: $2 \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{H} = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{h}{a} = \cos \alpha$ stąd $\frac{a}{H} = \frac{h}{a}$, $2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha$, $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0$ dla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.	1	

5	5.1	<p>Sporządzenie rysunku dla $n = 4$.</p> 	1	
	5.2	<p>Obliczenie sumy pól czterech prostokątów:</p> $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{15}{32}.$	1	
	5.3	<p>Obliczenie sumy pól wszystkich n prostokątów w postaci:</p> $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}.$	1	Wystarczy, że zdający poprawnie zapisze lewą stronę podanej postaci.
	5.4	<p>Wykorzystanie podanej tożsamości i przekształcenie sumy do postaci:</p> $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \text{ lub } S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$	1	
6	6.1	Zapisanie wielomianu w postaci: $W(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2 - 6x + 9$.	1	
	6.2	Zapisanie wielomianu w postaci sumy dwóch składników nieujemnych: np. $W(x) = x^2(x-1)^2 + (x-3)^2$ lub $W(x) = (x^2 - x)^2 + (x-3)^2$.	1	
	6.3	Uzasadnienie, że oba składniki są nieujemne i nie mogą być jednocześnie równe 0, więc wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.	1	
	6.1	<p>II metoda rozwiązania:</p> <p>Obliczenie pochodnej wielomianu $W(x)$ i jej miejsca zerowego:</p> $W'(x) = 2(2x-3)(x^2+1), \quad x = \frac{3}{2}.$	1	

	6.2	Uzasadnienie, że w punkcie $x = \frac{3}{2}$ wielomian $W(x)$ osiąga lokalne minimum.	1	
	6.3	Obliczenie wartości wielomianu $W(x)$ dla $x = \frac{3}{2}$ albo jej oszacowanie z dołu przez liczbę dodatnią i uzasadnienie, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych: $W\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{45}{16}$.	1	
7	7.1	Zapisanie równania $f(x) = 1$ w postaci: $-\cos^2 x + \cos x = 0$.	1	
	7.2	Zapisanie równań: $\cos x = 0$ lub $\cos x = 1$.	1	
	7.3	Zapisanie rozwiązań równania $f(x) = 1$ należących do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = 2\pi$.	1	
	7.4	Przedstawienie metody rozwiązania zadania, np. wprowadzenie pomocniczej niewiadomej $t = \cos x$ i $t \in \langle -1, 1 \rangle$ i zapisanie funkcji $f(t) = -t^2 + t + 1$ dla $t \in \langle -1, 1 \rangle$.	1	Punkt otrzymuje też zdający, który pominął dziedzinę funkcji f .
	7.5	Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem trójkątnu kwadratowego $f(t) = -t^2 + t + 1$: $t_w = \frac{1}{2}$.	1	Wystarczy, że zdający zapisze trójkąt w postaci kanonicznej: $f(t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$.
	7.6	Uwzględnienie faktu, że $\frac{1}{2} \in \langle -1, 1 \rangle$ i współczynnik przy t^2 jest ujemny, i obliczenie największej wartości funkcji f : $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$	1	Zdający nie musi analizować znaku współczynnika przy t^2 , o ile oblicza $f(-1)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i wybiera największą z nich.

8	8.1	I metoda rozwiązania: Sporządzenie rysunku 	1	Zdający może pominąć uzasadnienie, że punkt P leży na wysokości DO .
	8.2	Obliczenie długości krawędzi bocznej ostrosłupa: $a = 1$.	1	
	8.3	Obliczenie objętości ostrosłupa $ABCD$, np. poprzez stwierdzenie, że dany ostrosłup to „naroże” sześcianu o krawędzi długości 1: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}$.	1	
	8.4	Zapisanie równania z niewiadomą H – szukaną odległością: $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot H + \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{6}.$	1	Wystarczy że zdający zapisze, że objętość ostrosłupa jest sumą objętości czterech ostrosłupów, których podstawami są ściany danego ostrosłupa, a wysokością szukana odległość.
	8.5	Obliczenie szukanej odległości: $H = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$.	1	

8	8.1	<p>II metoda rozwiązania: Sporządzenie rysunku:</p>  <p>P_1 jest rzutem punktu P na wysokość ściany bocznej DC_1.</p>	1	
	8.2	Obliczenie długości DC_1 : $ DC_1 = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	1	
	8.3	Wyznaczenie $ DO $ z trójkąta DOC_1 : np. $ DO ^2 = DC_1 ^2 - OC_1 ^2$, gdzie $ OC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, stąd $ DO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.	1	
	8.4	<p>Zapisanie równania z niewiadomą H, np. z podobieństwa trójkątów $\triangle PP_1D \sim \triangle DOC_1$ wynika proporcja $\frac{ PP_1 }{ DP } = \frac{ OC_1 }{ DC_1 }$ i $PP_1 = H$,</p> $\frac{\frac{H}{\frac{\sqrt{3}}{3} - H}}{\frac{\sqrt{3}}{3} - H} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$	1	
	8.5	Obliczenie szukanej odległości: $H = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$.	1	
9	9.1	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $ \Omega = 8!$.	1	
	9.2	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , że jako pierwsze pójdą kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem: $ A = 3! \cdot 3! = 36$.	1	Wystarczy zapis $ A = 3! \cdot 3!$ lub $ A = 36$.

	9.3	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{3! \cdot 3!}{8!} = \frac{1}{1120}$.	1	
	9.4	Porównanie otrzymanego prawdopodobieństwa z 0,001, np.: $P(A) = \frac{1}{1120} < \frac{1}{1000}$ lub $P(A) \approx 0,0009 < 0,001$.	1	
10	10.1	Zapisanie układu pozwalającego wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty $(x_n, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, y_n)$: $\begin{cases} 1 = -a + b \\ 0 = a(-1 - n) + b \end{cases}$.	1	
	10.2	Wyznaczenie z układu niewiadomej b : np. $b = 1 + \frac{1}{n}$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ albo $y_n = \frac{n+1}{n}$.	1	
	10.1	II metoda rozwiązania: Zapisanie współczynnika kierunkowego prostej X_nP (przechodzącej przez punkty $(x_n, 0)$ i P): $a = \frac{1}{-1 - (-1 - n)} = \frac{1}{n}$.	1	
	10.2	Zapisanie równania prostej X_nP : $y = \frac{1}{n}(x+1) + 1$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ albo $y_n = \frac{n+1}{n}$.	1	
	10.1	III metoda rozwiązania: Wprowadzenie oznaczeń: $A = (x_n, 0)$, $P = (-1, 1)$, $C = (0, y_n)$. Wyznaczenie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{AP} = [n, 1]$, $\overrightarrow{PC} = [1, y_n - 1]$.	1	
	10.2	Zapisanie warunku równoległości wektorów: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{PC} \Leftrightarrow d(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PC}) = 0$ stąd $n(y_n - 1) - 1 = 0$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ albo $y_n = \frac{n+1}{n}$.	1	

	10.1	IV metoda rozwiązania: Wprowadzenie oznaczeń: $A = (x_n, 0)$, $P = (-1, 1)$, $C = (0, y_n)$. Wykorzystanie zależności: $ AP + PC = AC $, $\sqrt{(-1-x_n)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(0+1)^2 + (y_n-1)^2} = \sqrt{(0-x_n)^2 + (y_n-0)^2}$.	1	
	10.2	Podstawienie $x_n = -1 - n$ i doprowadzenie wyrażenia do postaci: $(n \cdot y_n - n - 1)^2 = 0$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ albo $y_n = \frac{n+1}{n}$.	1	
11	11.1	Przyjęcie oznaczeń, wykorzystanie definicji lub własności ciągu geometrycznego i zapisanie zależności między długościami boków trójkąta prostokątnego, np.: a, b, c – długości boków trójkąta prostokątnego i $a < b < c$, $b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$ lub $b^2 = ac$.	1	
	11.2	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania, w którym występują najwyżej dwie niewiadome, np.: $a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2$ lub $a^2 + ac = c^2$.	1	
	11.3	Zapisanie równania, np.: $q^4 - q^2 - 1 = 0$ lub $\left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{c}{a} - 1 = 0$.	1	
	11.4	Wykonanie podstawienia $t = q^2$ lub $t = \frac{c}{a}$ i rozwiązanie równania $t^2 - t - 1 = 0$: $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.	1	
	11.5	Obliczenie ilorazu ciągu: $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.	1	