

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny Arkusz pokazowy
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-Q00
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	4 marca 2022 r.

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 ¹	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.1) (R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie ciągu poprawnych przekształceń i wyrażenie $\log_4 49$ za pomocą danych liczb a oraz b : $\log_4 49 = a \cdot b$.

2 pkt – zastosowanie do $\log_3 4$ wzoru na zamianę podstawy logarytmu i przekształcenie $\log_3 4$ do postaci $\log_3 4 = \frac{2}{\log_2 3}$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie $\log_4 49$ za pomocą logarytmów o podstawie 3 z liczb naturalnych, np. $\log_4 49 = \frac{\log_3 49}{\log_3 4}$,

$$\log_4 49 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy $\log_4 49$, stosując wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu, i otrzymujemy

¹ Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, <https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024>

$$\log_4 49 = 2 \cdot \log_4 7 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4} = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\frac{\log_2 4}{\log_2 3}} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{2}$$

Zatem

$$\log_4 49 = 2 \cdot b \cdot \frac{a}{2} = a \cdot b$$

Odp. $\log_4 49 = a \cdot b$.

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.2) (R) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie

$$P = (-3, -3) \text{ i podanie prawidłowego wyniku: } y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}.$$

2 pkt – podanie poprawnej interpretacji liczby $f'(-3)$ jako współczynnika kierunkowego

$$\text{stycznej i obliczenie } f'(-3): f'(-3) = \frac{3}{4}.$$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji $f: f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy szukanej stycznej:

$$f'(-3) = \frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 3}{(-3-1)^2} = \frac{9+6-3}{16} = \frac{3}{4}$$

Zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-3, -3)$ ma postać:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Obliczamy współczynnik b . Ponieważ punkt P leży na prostej stycznej, więc

$$-3 = \frac{3}{4} \cdot (-3) + b. \text{ Stąd } b = -\frac{3}{4}.$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-3, -3)$ ma postać $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

Zadanie 3. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. VI.2) (R) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia ilorazu ciągu i poprawna metoda rozwiązania

nierówności $\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$ w zbiorze liczb naturalnych dodatnich oraz poprawny wynik: $n > 9$.

3 pkt – zapisanie, że $1 - q^n > 0$ (albo $0 < 1 - q^n < 1$) i przekształcenie nierówności

$\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$ do postaci nierówności wymiernej z niewiadomą t ($t = q^n$), np.

$$\frac{t}{1-t} < 0,001, \frac{q^n}{1-q^n} < 0,001$$

LUB

przekształcenie nierówności $\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$ do koniunkcji dwóch nierówności

wymiernych z niewiadomą t ($t = q^n$), np. $\frac{t}{1-t} > -0,001$ i

$\frac{t}{1-t} < 0,001$ (albo: $\frac{q^n}{1-q^n} < 0,001$ i $\frac{q^n}{1-q^n} > -0,001$), i zapisanie, że nierówność

$\frac{t}{1-t} > -0,001$ jest spełniona dla każdej liczby $t \in (0, 1)$ (analogicznie: zapisanie,

że nierówność $\frac{q^n}{1-q^n} > -0,001$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej

dodatniej n).

2 pkt – obliczenie ilorazu q ciągu (a_n) : $q = \frac{1}{2}$.

1 pkt – skorzystanie ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i zapisanie równania

$$a_1 + a_2 + a_3 = S \cdot (1 - q^3)$$

LUB

zapisanie dwóch równań z niewiadomymi a_1 oraz q , wynikających z treści zadania,

$$\text{np. } a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7 \text{ i } 8 = \frac{a_1}{1-q}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) istnieje i jest różna od zera, więc $a_1 \neq 0$ i iloraz q tego ciągu spełnia warunek $|q| < 1$.

Korzystamy ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i obliczamy iloraz q ciągu (a_n) :

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot \frac{1 - q^3}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \cdot (1 - q^3) = S \cdot (1 - q^3)$$

$$7 = 8(1 - q^3)$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Zatem $S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1$ i $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. Stąd, wobec $a_1 \neq 0$,

otrzymujemy $\frac{S - S_n}{S_n} = \frac{2a_1 - 2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]}{2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]} = \frac{2a_1 \cdot (\frac{1}{2})^n}{2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n}$.

Rozwiązujemy nierówność $\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$ w zbiorze liczb całkowitych dodatnich:

$$\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$$

$$\left| \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} \right| < 0,001$$

Ponieważ $q = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, więc $1 - (\frac{1}{2})^n > 0$. Zatem nierówność $\left| \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} \right| < 0,001$

możemy przekształcić do postaci $\frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} < 0,001$. Stąd otrzymujemy dalej

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,001 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad / \cdot 2^n$$

$$1 < 0,001(2^n - 1)$$

$$2^n > 1001$$

Ponieważ $2^9 = 512$ i $2^{10} = 1024$, więc $n > 9$.

Rozwiązaniem nierówności $\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$ w zbiorze liczb całkowitych dodatnich są wszystkie liczby naturalne większe od 9.

Zadanie 4. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania [...].	Zdający: III.3) (R) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.5) (R) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

5 pkt – wyznaczenie części wspólnej rozwiązań warunków (W1)–(W5) i podanie poprawnego

wyniku: $m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty)$.

4 pkt – zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz rozwiązanie warunków (W1)–(W5):

(W1) $m \neq 2$

(W2) $m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$

(W3) $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(W4) $m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

(W5) $m \neq 11$.

3 pkt – rozwiązanie warunków (W2)–(W4):

(W2) $m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$

(W3) $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(W4) $m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

2 pkt – zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby równanie (2) było równaniem kwadratowym, które ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie różne od liczby 6: $m - 2 \neq 0$ i $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ i $(m - 2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m + 3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$
 LUB

zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków

$x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ w zależności od parametru m : $\frac{m+1}{m-2} > 0$

i $-\frac{4(m+3)}{m-2} > 0$

LUB

zapisanie, że dla $m = 2$ warunki zadania nie są spełnione oraz wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru m , dla których wyróżnik Δ trójkianu

$(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1 = 0$ jest dodatni.

1 pkt – zapisanie, że równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku tylko wtedy, gdy równanie (2) ma dwa różne rozwiązania dodatnie różne od liczby 6.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania

$$(x - 6) \cdot [(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1] = 0 \quad (1)$$

jest liczba 6. Zatem równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1 = 0 \quad (2)$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania dodatnie x_1, x_2 takie, że $x_1 \neq 6$ i $x_2 \neq 6$.

Dla $m = 2$ równanie (2) przyjmuje postać $-20x + 3 = 0$ i ma tylko jedno rozwiązanie.

Pozostaje wyznaczyć te wartości parametru m , dla których warunki zadania są spełnione, a równanie (2) jest kwadratowe, tj. wyznaczyć te wartości parametru, dla których spełnione są jednocześnie następujące warunki:

$$(W1) \quad m - 2 \neq 0$$

$$(W2) \quad \Delta > 0$$

$$(W3) \quad x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$(W4) \quad x_1 + x_2 > 0$$

$$(W5) \quad (m - 2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m + 3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$$

Rozwiązaniem warunku (W1) jest $m \neq 2$.

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$:

$$[-4(m + 3)]^2 - 4 \cdot (m - 2) \cdot (m + 1) > 0$$

$$16m^2 + 96m + 144 - 4m^2 + 4m + 8 = 0$$

$$12m^2 + 100m + 152 > 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, rozwiązujemy warunek (W3):

$$x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$\frac{m + 1}{m - 2} > 0$$

$$(m + 1)(m - 2) > 0 \wedge m \neq 2$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, rozwiązujemy warunek (W4):

$$x_1 + x_2 > 0$$

$$-\frac{-4(m+3)}{m-2} > 0$$

$$(m+3)(m-2) > 0 \wedge m \neq 2$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek (W5):

$$(m-2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m+3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$$

$$13m - 143 \neq 0$$

$$m \neq 11$$

Wyznaczamy część wspólną rozwiązań warunków (W1)–(W5) i otrzymujemy

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

Równanie (1) ma trzy różne rozwiązania tego samego znaku dla

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) (R) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zasady oceniania

dla sposobu 1.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ do postaci $3a(a^2 + 2)$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba $3a(a^2 + 2)$ jest podzielna przez 4

LUB

przekształcenie wyrażenia $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ do postaci $3a(a^2 + 2)$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba $3a(a^2 + 2)$ jest podzielna przez 9.

1 pkt – zapisanie sumy sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla sposobu 2.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$ do postaci $36 \cdot P(k) + 12 \cdot Q(k)$, gdzie P i Q są wielomianami o współczynnikach całkowitych, np. $12(16k^3 + 24k^2 + 14k + 3)$, $36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1) + 12k(k^2 + 2)$.

1 pkt – zapisanie sumy sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Sumę sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$, gdzie a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

Ponieważ

$$(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 3a(a^2 + 2),$$

więc liczba $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ jest podzielna przez 4 jako iloczyn liczby parzystej $3a$ i liczby parzystej $a^2 + 2$.

Jeżeli $a = 3k$, przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, to $3a(a^2 + 2) = 9k(9k^2 + 2)$ jest liczbą podzielną przez 9.

Jeżeli $a = 3k + 1$, przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, to $3a(a^2 + 2) = 3(3k + 1)[(3k + 1)^2 + 2] = 3(3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) = 9(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$ jest liczbą podzielną przez 9.

Jeżeli $a = 3k + 2$, przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, to liczba $3a(a^2 + 2) = 3(3k + 2)[(3k + 2)^2 + 2] = 3(3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 9(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)$ jest liczbą podzielną przez 9.

Zatem suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest podzielna przez 9.

Ponieważ suma trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 4 i przez 9 oraz liczby 4 i 9 są względnie pierwsze, więc ta suma jest liczbą podzielną przez 36.

Sposób 2.

Sumę sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3 = 64k^3 + 48k^2 + 12k + 1 + 64k^3 + 96k^2 + 48k + 8 + 64k^3 + 144k^2 + 108k + 27 = 192k^3 + 288k^2 + 168k + 36 = 12(16k^3 + 24k^2 + 14k + 3) = 36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1) + 12k(k^2 + 2)$, więc wystarczy pokazać, że liczba $k(k^2 + 2)$ jest podzielna przez 3 dla każdego $k \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli $k = 3m$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2 + 2) = 3m(9m^2 + 2)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $m(9m^2 + 2)$.

Jeżeli $k = 3m + 1$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2 + 2) = (3m + 1)[(3m + 1)^2 + 2] = (3m + 1)(9m^2 + 6m + 3) = 3(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1)$.

Jeżeli $k = 3m + 2$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, to liczba $k(k^2 + 2) = (3m + 2)[(3m + 2)^2 + 2] = (3m + 2)(9m^2 + 12m + 6) = 3(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej $(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2)$.

Zadanie 6.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$. IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

2 pkt – doprowadzenie wyrażenia określającego długość odcinka PR do postaci

$$\sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}.$$

1 pkt – przyjęcie $R = (x, -0,5(x - 0,5)^2 + 4)$ (lub $R = (x, g(x))$) i zastosowanie wzoru na odległość dwóch punktów do wyznaczenia długości odcinka PR :

$$|PR| = \sqrt{(x + 1)^2 + (-0,5(x - 0,5)^2 + 4 - 1)^2}$$

$$(\text{lub } |PR| = \sqrt{(x + 1)^2 + (g(x) - 1)^2}).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ $R \in g$, więc $R = (x, -0,5(x - 0,5)^2 + 4)$. Zatem

$$|PR| = \sqrt{(x - (-1))^2 + (-0,5(x - 0,5)^2 + 4 - 1)^2}$$

Stosując wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń, otrzymujemy

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + (-0,5(x - 0,5)^2)^2 + 2 \cdot (-0,5)(x - 0,5)^2 \cdot 3 + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}\left(x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - 3x^2 + 3x - \frac{3}{4} + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

To należało pokazać.

Zadanie 6.2. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym [...]; XIII.4) (R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.5) (R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

6 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i poprawne uzasadnienie, że funkcja d przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$, obliczenie współrzędnych punktu K oraz długości $|PK|$ toru: $K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$,
 $|PK| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

5 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i uzasadnienie, że funkcja k przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$
 LUB
 poprawne uzasadnienie, że funkcja d przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$ oraz obliczenie $g\left(\frac{3}{2}\right)$, oraz obliczenie $d\left(\frac{3}{2}\right)$: $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$, $d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

4 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji k : $x = \frac{3}{2}$
 LUB

uzasadnienie, że funkcja k przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

3 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i wyznaczenie pochodnej funkcji k : $k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$ dla $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$
 LUB

obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji k : $x = \frac{3}{2}$.

2 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g i określenie dziedziny

funkcji d : $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$

LUB

wyznaczenie pochodnej funkcji k : $k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$ dla

$x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$.

1 pkt – uzasadnienie, że punkt K musi należeć do wykresu funkcji g

LUB

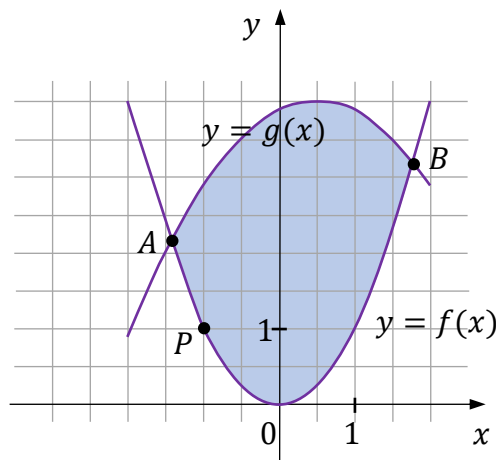
określenie dziedziny funkcji d : $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pokażemy najpierw, że optymalna lokalizacja końca toru regatowego musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję g .

Niech $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ będą punktami przecięcia wykresów funkcji f i g (zobacz rysunek).



Współrzędne każdego punktu $C = (x_C, y_C)$ leżącego na fragmencie paraboli (będącej wykresem funkcji f) pomiędzy punktami A i B spełniają nierówności

$$|x_C - x_P| \leq |x_B - x_P| \quad \wedge \quad |y_C - y_P| \leq |y_B - y_P|$$

więc

$$|x_C - x_P|^2 + |y_C - y_P|^2 \leq |x_B - x_P|^2 + |y_B - y_P|^2$$

$$|PC|^2 \leq |PB|^2$$

$$|PC| \leq |PB|$$

Ponieważ $B \in g$, więc optymalna lokalizacja końca toru musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję g .

Obliczamy pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g :

$$x^2 = -0,5(x - 0,5)^2 + 4$$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{31}{8} = 0$$

$$12x^2 - 4x - 31 = 0$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{94}}{6} \approx -1,45 \quad \vee \quad x = \frac{1 + \sqrt{94}}{6} \approx 1,78$$

Zatem $x_A = \frac{1 - \sqrt{94}}{6}$ oraz $x_B = \frac{1 + \sqrt{94}}{6}$.

W celu wyznaczenia punktu, w którym należy umiejscowić koniec toru, rozpatrujemy funkcję d określoną wzorem

$$d(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

dla każdego $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right]$ i szukamy argumentu, dla którego funkcja ta osiąga wartość największą.

Funkcja d określa odległość punktu P od punktu R (leżącego na linii brzegowej określonej przez funkcję g) w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu R .

Tworzymy funkcję pomocniczą k określoną wzorem

$$k(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64} \quad \text{dla } x \in \left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right].$$

Obliczamy pochodną funkcji k :

$$k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{39}{8}$$

i miejsca zerowe pochodnej:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{39}{8} = 0$$

$$8x^3 - 12x^2 - 26x + 39 = 0$$

$$4x^2(2x - 3) - 13(2x - 3) = 0$$

$$(4x^2 - 13)(2x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$

Spośród liczb $\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ tylko liczba $\frac{3}{2}$ należy do przedziału $\left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right]$.

Zatem $k'(x) = 0$ tylko dla $x = \frac{3}{2}$.

Ponieważ:

$$k'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2} \right) \text{ oraz}$$

$$k'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right],$$

więc

funkcja k jest rosnąca w zbiorze $\left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2} \right]$ oraz malejąca w zbiorze $\left[\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$.

Zatem funkcja k osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

Ponieważ funkcja $h(t) = \sqrt{t}$ jest rosnąca w zbiorze $[0, +\infty)$, więc funkcja d osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego funkcja k osiąga wartość największą.

Stąd wynika, że funkcja d osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{3}{2}$.

Obliczamy współrzędne punktu K oraz $|PK|$:

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -0,5\left(\frac{3}{2} - 0,5\right)^2 + 4 = 3,5$$

$$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$|PK| = d\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Koniec toru regatowego należy zlokalizować w punkcie, który odpowiada punktowi

$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Największa możliwa długość toru regatowego jest równa $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (j).

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.5 (R) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.6) (R) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne rozwiązanie równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ w zbiorze $[0, \pi]$:

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \pi.$$

3 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ do postaci alternatywy

równań $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$ oraz $\sin x = 0$ i zapisanie, że równanie

$\sin x = -\frac{1}{2}$ nie ma rozwiązań w zbiorze $[0, \pi]$, i rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$

(lub $\sin x = 0$) w zbiorze $[0, \pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$ (lub $x = 0 \vee x = \pi$).

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ do postaci alternatywy dwóch równań: $1 - 4\sin^2 x = 0$ lub $\sin x = 0$.

1 pkt – przekształcenie równania $\sin(3x) = 2 \sin x$ do postaci, w której występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x , np.

$$2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin(3x) = 2 \sin x$ równoważnie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x . Skorzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów, wzorów na cosinus i sinus podwojonego kąta oraz z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin(3x) = 2 \sin x$$

$$\sin(2x + x) = 2 \sin x$$

$$\sin(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \sin x = 2 \sin x$$

$$2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x$$

$$2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x$$

$$-4 \sin^3 x + \sin x = 0$$

Stąd otrzymujemy dalej

$$(-4 \sin^2 x + 1) \sin x = 0$$

$$-4 \sin^2 x + 1 = 0 \quad \vee \quad \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 0$$

Równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ dwa rozwiązania: $x = \frac{1}{6}\pi$ oraz $x = \frac{5}{6}\pi$.

Równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ nie ma w zbiorze $[0, \pi]$ rozwiązań.

Równanie $\sin x = 0$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ dwa rozwiązania: $x = 0$ oraz $x = \pi$.

Równanie $\sin(3x) = 2 \sin x$ ma w zbiorze $[0, \pi]$ cztery rozwiązania: $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.1) (R) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; VIII.2) (R) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne zastosowanie twierdzeń i zależności prowadzących do obliczenia promienia R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ i pokazanie, że

$$R = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}.$$

3 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i zapisanie równości $2R = \frac{d}{\sin \alpha}$.

2 pkt – obliczenie wysokości h trapezu $ABCD$: $h = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}$.

1 pkt – zastosowanie własności czworokąta opisanego na okręgu i obliczenie c : $c = \frac{1}{4}l$

LUB

zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta AEC i zapisanie równości

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = d^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość podstawy AB trapezu,

b – długość podstawy CD trapezu,

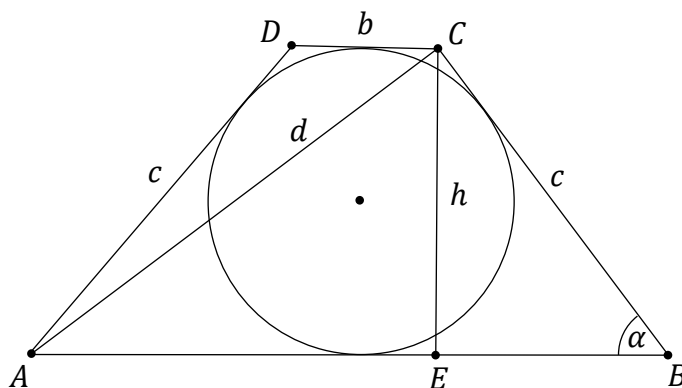
h – wysokość trapezu $ABCD$,

c – długość ramienia trapezu $ABCD$,

α – miara kąta ABC trapezu.

E – punkt wspólny prostej

przechodzącej przez C i zawierającej wysokość trapezu oraz odcinka AB (zobacz rysunek).



Trapez $ABCD$ jest równoramienny, więc $|EB| = \frac{a-b}{2}$ oraz $|AE| = \frac{a+b}{2}$.

Ponieważ $a + b + 2c = l$ (z warunków zadania) oraz $a + b = 2c$ (z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymujemy), więc $4c = l$, czyli $c = \frac{1}{4}l$. Stąd też $|AE| = \frac{a+b}{2} = c$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AEC i wyznaczamy wysokość h trapezu:

$$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$$

$$c^2 + h^2 = d^2.$$

$$h^2 = d^2 - c^2 = d^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$h = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}$$

Okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Stosujemy twierdzenie sinusów do wyznaczenia promienia R okręgu opisanego na trójkącie ABC :

$$2R = \frac{|AC|}{\sin \alpha}$$

Sinus kąta α obliczamy z trójkąta prostokątnego BEC :

$$\sin \alpha = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}}{\frac{l}{4}} = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{l}$$

Zatem promień R jest równy

$$R = \frac{|AC|}{2 \sin \alpha} = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$$

To kończy dowód.

Zadanie 9. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.1) (R) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach [...]; IX.3) (R) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu [...].

Zasady oceniania

- 6 pkt – wyznaczenie równania prostej BC i obliczenie współrzędnych punktu styczności prostej BC z okręgiem $\mathcal{O}$: $y = 0$ i $(8, 0)$.
- 5 pkt – uzasadnienie, że prosta o równaniu $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ nie przechodzi przez punkt B i obliczenie współrzędnych punktu B : $B = (0, 0)$.
- 4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu B : $B = (0, 0)$
 LUB
 – uzasadnienie, że prosta o równaniu $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ nie przechodzi przez punkt B .
- 3 pkt – wyznaczenie równań prostych, które są styczne do okręgu $\mathcal{O}$ i przechodzą przez punkt A , np. $y = \frac{4}{3}x$ i $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$.
- 2 pkt – zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej i zapisanie równania z jedną niewiadomą, prowadzącego do wyznaczenia współczynników występujących w równaniu prostej, która jest styczna do okręgu $\mathcal{O}$ i przechodzi przez punkt A , np.

$$\frac{|a \cdot 8 - 4 + 12 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4.$$
- 1 pkt – zapisanie równania prostej, która jest styczna do okręgu i przechodzi przez punkt A w postaci kierunkowej (lub ogólnej), ze współczynnikami zależnymi od jednego parametru, np. $y = ax + 12 - 9a$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez l prostą, która przechodzi przez wierzchołki A i B trójkąta ABC . Prosta ta jest styczna do okręgu $\mathcal{O}$. Równanie prostej l można zapisać w postaci kierunkowej $y = ax + b$ (prosta o równaniu $x = 9$ nie jest styczna do okręgu, gdyż równanie $(9 - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ ma dwa rozwiązania). Ponieważ $A \in l$, więc $12 = 9a + b$, czyli $b = 12 - 9a$.

Prosta l ma równanie $ax - y + 12 - 9a = 0$ i jest styczna do okręgu o środku $S = (8, 4)$ i promieniu 4. Zatem odległość punktu S od prostej l jest równa 4:

$$\frac{|a \cdot 8 - 4 + 12 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

Stąd, poprzez przekształcenia równoważne, otrzymujemy kolejno

$$|8 - a| = 16\sqrt{a^2 + 1}$$

$$64 - 16a + a^2 = 16a^2 + 16$$

$$15a^2 + 16a - 48 = 0$$

$$a = \frac{4}{3} \quad \vee \quad a = -\frac{12}{5}$$

Rozważamy przypadek $a = \frac{4}{3}$.

Gdy $a = \frac{4}{3}$, to $b = 0$ i równanie prostej l ma postać $y = \frac{4}{3}x$.

Wierzchołek B trójkąta ABC jest punktem przecięcia prostych k i l .

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ jest $(x, y) = (0, 0)$. Zatem $B = (0, 0)$. Ponieważ

okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do osi Ox i $B = (0, 0)$, więc prosta o równaniu $y = 0$ zawiera bok BC trójkąta ABC styczny do danego okręgu w punkcie $(8, 0)$.

Rozważamy przypadek $a = -\frac{12}{5}$.

Gdy $a = -\frac{12}{5}$, to $b = \frac{168}{5}$ i otrzymujemy prostą l o równaniu $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$.

Zauważmy jednak, że prosta o równaniu $y = \frac{5}{12}x$ jest prostopadła do prostej

$y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ i tworzy z osią Ox kąt ostry o mierze α takiej, że $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. Prosta k

tworzy z osią Ox kąt ostry o mierze β takiej, że $\tan \beta = \frac{1}{2}$. Zatem, korzystając

z własności funkcji tangens, otrzymujemy $\alpha < \beta$. Wynika stąd, że $|\sphericalangle ABS| > 90^\circ$, gdzie B jest punktem przecięcia prostych k i l . To jest jednak niemożliwe, gdyż (z założenia)

$$|\sphericalangle ABS| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ABC|, \text{ a } \frac{1}{2} |\sphericalangle ABC| < \frac{1}{2} \cdot 180^\circ.$$

Zadanie 10. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni [...] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń. X.5) (R) wyznacza przekroje [...] ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania**dla sposobu 1.**

6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość V ostrosłupa i poprawne obliczenie

$$\text{współczynnika } k: k = \frac{\sqrt{2}}{36}.$$

5 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α , wysokości H ostrosłupa:

$$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}}.$$

4 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α , kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$,

$$h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}.$$

3 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach P i α , kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$

LUB

obliczenie, przy obranych wartościach P i α , kwadratu wysokości ściany bocznej

$$\text{ostrosłupa: } h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}.$$

2 pkt – zastosowanie, przy obranych wartościach P i α , definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin \alpha, \left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

LUB

zapisanie, przy obranych wartościach P i α , zależności między h oraz a ,

$$\text{wynikających ze związków miarowych w trójkącie } ESF \text{ (lub } EGS), \text{ np. } h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

LUB

zastosowanie, przy obranych wartościach P i α , definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą h , np.

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{\frac{h}{h}} = \sin \alpha, h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2.$$

- 1 pkt – przypisanie wielkościom P i α konkretnych wartości liczbowych (pod warunkami: $P > 0$ i $\alpha \in (0, 45^\circ)$) i wyznaczenie wysokości h ściany bocznej w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa: $h = \frac{P}{2a}$

LUB

przypisanie wielkościom P i α konkretnych wartości liczbowych (pod warunkami: $P > 0$ i $\alpha \in (0, 45^\circ)$) i wyznaczenie długości a krawędzi bocznej w zależności od wysokości h ściany bocznej ostrosłupa: $a = \frac{P}{2h}$.

- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla sposobu 2.

- 6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość V ostrosłupa i poprawne obliczenie

współczynnika k : $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

- 5 pkt – obliczenie wysokości H ostrosłupa: $H = \sqrt{\frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha} - \frac{\sqrt{2}P \cdot \sin \alpha}{4}}$.

- 4 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$, $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}$.

- 3 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$
LUB

obliczenie kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}$.

- 2 pkt – zastosowanie definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą a , np.

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin \alpha, \left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

LUB

zastosowanie definicji sinusa w trójkącie EGS (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta EFS) i zapisanie równania z jedną niewiadomą h , np.

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{\frac{P}{4h}} = \sin \alpha, h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2$$

- 1 pkt – wyznaczenie wysokości h ściany bocznej w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa: $h = \frac{P}{2a}$

LUB

wyznaczenie długości a krawędzi bocznej w zależności od wysokości h ściany bocznej ostrosłupa: $a = \frac{P}{2h}$.

- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Ponieważ k jest współczynnikiem liczbowym, który nie zależy od P ani od α , więc obliczymy objętość ostrosłupa prawidłowego o polu powierzchni bocznej $P = \sqrt{2}$, w którym $\alpha = 30^\circ$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

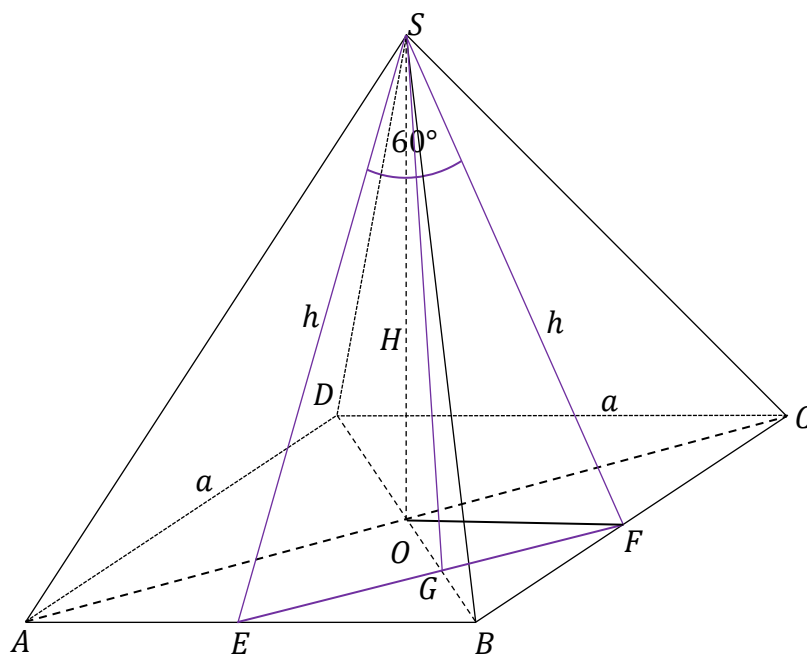
h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S ,

H – wysokość ostrosłupa,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

SE, SF – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

SG – wysokość trójkąta SEG poprowadzona z wierzchołka S .



Wyznaczamy wysokość h ściany bocznej ostrosłupa $ABCD S$ poprowadzonej z wierzchołka S w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2a}$$

Ponieważ $\alpha = 30^\circ$, więc trójkąt równoramienny ESF jest równoboczny. Zatem

$$h = |EF| = \sqrt{2} \cdot |EB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Stąd}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 1$$

więc

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta FOS i obliczamy wysokość H ostrosłupa $ABCD$:

$$|OS|^2 = |FS|^2 - |OF|^2$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$H = \frac{1}{2}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCD$:

$$V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Z treści zadania wiadomo, że $V = \sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)}$, więc $V = \sqrt{k \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$.

Porównując otrzymane wartości objętości, obliczamy k :

$$\frac{1}{6} = \sqrt{k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{36}$$

Współczynnik k ma wartość $\frac{\sqrt{2}}{36}$.

Sposób 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

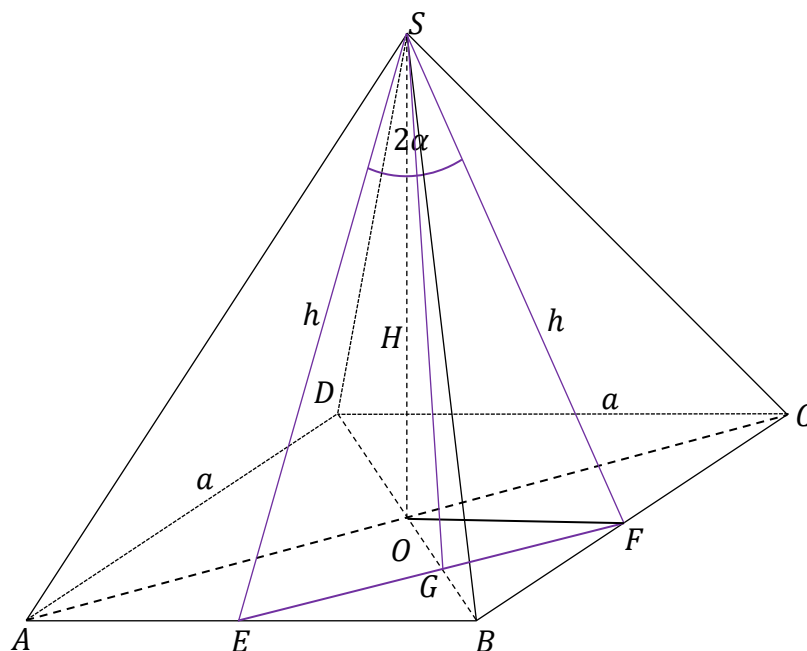
h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S ,

H – wysokość ostrosłupa,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

SE , SF – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

SG – wysokość trójkąta SEG poprowadzona z wierzchołka S .



Wyznaczamy wysokość h ściany bocznej ostrosłupa $ABCD S$ poprowadzonej z wierzchołka S w zależności od długości a krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{P}{2a}$$

Ponieważ $|EF| = \sqrt{2} \cdot |EB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $|EG| = \frac{1}{2}|EF| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Zatem

$$\frac{|EG|}{|ES|} = \sin \alpha$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin \alpha$$

$$a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$$

Stąd

$$h^2 = \left(\frac{P}{2a}\right)^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta FOS i obliczamy wysokość H ostrosłupa $ABCD S$:

$$|OS|^2 = |FS|^2 - |OF|^2$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha} - \frac{\sqrt{2}P \cdot \sin \alpha}{4}$$

$$H^2 = \frac{P(1 - 2 \sin^2 \alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}$$

$$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCD S$:

$$V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} P \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{P \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{36}} \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)$$

Zatem $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) (R) stosuje schemat Bernoulliego.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zaliczenia egzaminu przez

studenta i poprawny wynik: $\frac{123841}{4^{15}}$.

3 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach i skorzystanie z addytywności prawdopodobieństwa dla zdarzeń parami rozłącznych.

2 pkt – wyznaczenie zdarzenia odpowiadającego zaliczeniu egzaminu za pomocą zdarzeń S_{15}^k , gdzie $k \in \{11, 12, 13, 14, 15\}$: $S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}$.

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Próba Bernoulliego jest losowe wybranie przez studenta odpowiedzi w zadaniu. Sukcesem w tej próbie jest wybranie odpowiedzi, która jest poprawna.

Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = 0,25$, natomiast prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 0,75$.

Niech S_{15}^k oznacza zdarzenie polegające na wybraniu przez studenta poprawnych odpowiedzi w dokładnie k zadaniach spośród 15.

Korzystamy ze schematu Bernoulliego. Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe $P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15})$. Zdarzenia $S_{15}^{11}, S_{15}^{12}, S_{15}^{13}, S_{15}^{14}, S_{15}^{15}$ są parami rozłączne, więc

$$\begin{aligned}
 P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}) &= P(S_{15}^{11}) + P(S_{15}^{12}) + P(S_{15}^{13}) + P(S_{15}^{14}) + P(S_{15}^{15}) = \\
 &= \binom{15}{11} \cdot (0,25)^{11} \cdot (0,75)^4 + \binom{15}{12} \cdot (0,25)^{12} \cdot (0,75)^3 + \binom{15}{13} \cdot (0,25)^{13} \cdot (0,75)^2 + \\
 &+ \binom{15}{14} \cdot (0,25)^{14} \cdot (0,75)^1 + \binom{15}{15} \cdot (0,25)^{15} = \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot (1365 \cdot 81 + 455 \cdot 27 + 105 \cdot 9 + 15 \cdot 3 + 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot 123841 \approx 0,00012
 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe $\frac{123841}{1024^3}$.