



# **PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ 2018/2019**

## **MATEMATYKA POZIOM ROZSZERZONY**

### **ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

## Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

### Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                   | Poprawna odpowiedź |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający:<br>P6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;<br>R2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu. | <b>D</b>           |

### Zadanie 2. (0–1)

|                                          |                                                                                                                         |          |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | R1.1. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną [...]. | <b>D</b> |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

### Zadanie 3. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                                                                |          |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 5. Ciągi. Zdający:<br>P4) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę wyrazów ciągu geometrycznego;<br>R1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym. | <b>C</b> |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

### Zadanie 4. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                            |          |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R6. Trygonometria. Zdający:<br>2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, kosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach [...];<br>3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych. | <b>C</b> |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

### Zadanie 5. (0–2)

|                                                   |                                                                                                                                                                      |            |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | R5.2. Ciągi.<br>Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$ , $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów. | <b>101</b> |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|

Uwaga. Zdający otrzymuje 2 punkty wyłącznie po udzieleniu poprawnej odpowiedzi. Nie przyznaje się punktów za cząstkowe elementy rozwiązania.

## Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 6. (0–2)

| Wymaganie ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:<br>3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;<br>4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany.<br>R3.4. Równania i nierówności.<br>Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian. |

### Przykładowe rozwiązania

#### Sposób I

Jeśli

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + 6x + 5)(x^2 + bx + c) = x^4 + (6 + b)x^3 + (5 + 6b + c)x^2 + (5b + 6c)x + 5c$$

dla każdego  $x \in R$ , to współczynniki po obu stronach równości przy tych samych potęgach  $x$  są równe, czyli  $6 + b = 0$ ,  $5 + 6b + c = p$ ,  $5b + 6c = 0$  i  $5c = q$ . Wobec tego  $b = -6$ ,  $c = 5$ ,  $p = -26$  i  $q = 25$ .

#### Sposób II

Zachodzi równość  $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$ . Ponieważ wielomian  $x^4 + px^2 + q$  ma być podzielny przez  $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$ , więc liczby  $-1$  i  $-5$  muszą być jego pierwiastkami, czyli  $0 = (-1)^4 + p(-1)^2 + q = p + q + 1$  oraz  $0 = (-5)^4 + p(-5)^2 + q = 25p + q + 625$ . Mnożąc pierwsze równanie przez 25 i odejmując wynik od drugiego, otrzymujemy  $0 = -24q + 600$ , więc  $0 = -q + 25$ , czyli  $q = 25$ , zatem  $0 = p + 25 + 1$ , czyli  $p = -26$ .

#### Sposób III

Dzielimy wielomian  $x^4 + px^2 + q$  przez trójmian  $x^2 + 6x + 5$  a następnie resztę przyrównujemy do wielomianu zerowego. Otrzymujemy układ równań:  $30 - 6(p + 31) = 0$  i  $q - 5(p + 31) = 0$ , z którego otrzymujemy  $p = -26$  i  $q = 25$ .

### Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

- gdy zapisze warunek wynikający z podzielności wielomianów,  
np.  $x^4 + px^2 + q = (x^2 + 6x + 5)(x^2 + bx + c)$

albo

- rozłoży trójmian  $x^2 + 6x + 5$  do postaci iloczynowej  $(x + 1)(x + 5)$  i stwierdzi, że liczby  $-5$  oraz  $-1$  są pierwiastkami wielomianu  $x^4 + px^2 + q$

albo

- wykona dzielenie wielomianu  $x^4 + px^2 + q$  przez trójmian  $x^2 + 6x + 5$ , a następnie przyrówna resztę do wielomianu zerowego.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy obliczy  $p$  i  $q$  ( $-26$  i  $25$ ).

**Zadanie 7. (0–2)**

| Wymaganie ogólne               | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | R10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych. |

**Przykładowe rozwiązanie**

W żadnej z poszukiwanych permutacji na sąsiednich miejscach nie mogą występować liczby nieparzyste, ponieważ ich iloczyn jest liczbą nieparzystą. A zatem wśród dwóch sąsiednich elementów takiej permutacji zawsze występuje liczba parzysta. Wśród liczb  $\{1, \dots, 31\}$  znajduje się 16 liczb nieparzystych i 15 liczb parzystych. Między każdymi dwoma liczbami nieparzystymi musi znaleźć się liczba parzysta, więc liczby muszą wystąpić w kolejności: nieparzysta, parzysta, nieparzysta, parzysta itd.

Wyznaczamy liczbę poszukiwanych permutacji. Na miejscach nieparzystych tej permutacji liczby można ustawić na  $16!$  sposobów (liczba permutacji 16 elementowego zbioru liczb nieparzystych  $\{1, 3, \dots, 31\}$ ). Dla każdego układu liczb nieparzystych dobrać można niezależnie ustawienie liczb na parzystych miejscach. Możliwości takiego ustawienia jest  $15!$ . A zatem liczba poszukiwanych permutacji wynosi  $16! \cdot 15!$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 pkt**

gdy zauważy, że w każdej z szukanych permutacji liczby parzyste i nieparzyste występują naprzemiennie, počawszy od nieparzystych.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**

gdy zauważy, że liczby nieparzyste można dowolnie przestawiać, więc można je ustawić na  $16!$  sposobów, a liczby parzyste na  $15!$  sposobów, a następnie zapisze wynik w postaci  $16! \cdot 15!$  lub  $15! \cdot 16!$ .

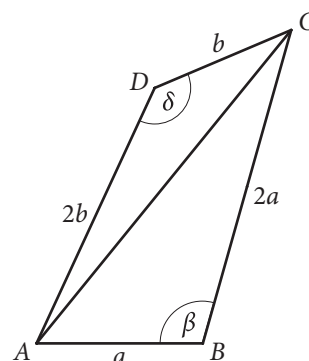
**Zadanie 8. (0–3)**

| Wymaganie ogólne               | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 7. Planimetria. Zdający:<br>P4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi;<br>R5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia kosinusów. |

## Przykładowe rozwiązania

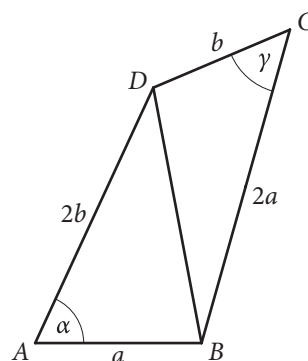
### Sposób I

Niech  $\beta = \sphericalangle ABC$ , zaś  $\delta = \sphericalangle CDA$ . Wówczas pole czworokąta  $ABCD$  wyraża się, jako suma pól trójkątów  $ABC$  oraz  $CDA$ , wzorem  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \sin(\beta) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2b \cdot \sin(\delta) = a^2 \sin(\beta) + b^2 \sin(\delta)$ . A zatem z założenia występującego w treści zadania mamy równość  $a^2 \sin(\beta) + b^2 \sin(\delta) = a^2 + b^2$ . Skoro jednak dla każdego  $x \in R$  zachodzi nierówność  $\sin(x) \leq 1$ , to musimy mieć  $\sin(\beta) = \sin(\delta) = 1$ . Argumentami są tu miary kątów wewnętrznych czworokąta, a zatem  $\beta = \delta = 90^\circ$ . Trójkąty  $ABC$  oraz  $CDA$  są więc prostokątne. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy zatem równości postaci  $a^2 + (2a)^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 = b^2 + (2b)^2$ , co po uproszczeniu daje  $a = b$ . Ponieważ pary przeciwległych boków czworokąta mają równe długości, więc jest on równoległobokiem, w którym jest kąt prosty. Wobec tego wszystkie jego kąty są proste, więc jest to prostokąt.



### Sposób II

Niech  $\alpha = \sphericalangle DAB$  oraz  $\gamma = \sphericalangle BCD$ . Wówczas pole czworokąta  $ABCD$  wyraża się, jako suma pól trójkątów  $ABD$  i  $BCD$ , wzorem  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma))$ . Skoro dla każdego  $x \in R$  zachodzi nierówność  $\sin(x) \leq 1$ , to w szczególności  $\sin(\alpha) \leq 1$  oraz  $\sin(\gamma) \leq 1$ . Dostajemy zatem nierówność postaci  $2ab \geq ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma))$ . Korzystając dalej z nierówności  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ , prawdziwej dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x, y$ , która wynika z nierówności  $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$ , dostajemy  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ . Z założenia pole czworokąta  $ABCD$  równe jest jednak  $a^2 + b^2$ . Ostatecznie więc dostajemy  $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma)) = a^2 + b^2$ . Skrajne wyrazy powyższego ciągu nierówności są równe, zatem wszystkie te nierówności są równościami. W szczególności  $a^2 + b^2 = 2ab$  oraz  $2ab = ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma))$ . Pierwszą równość zapisać można równoważnie w postaci  $(a - b)^2 = 0$ , co implikuje, że  $a = b$ . A zatem czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem. Skoro zaś  $ab > 0$ , to druga równość implikuje  $2 = \sin(\alpha) + \sin(\gamma)$ . Korzystamy raz jeszcze z nierówności  $\sin(\alpha) \leq 1$  oraz  $\sin(\gamma) \leq 1$ , co daje nam  $\sin(\alpha) = \sin(\gamma) = 1$ . Argumentami są tu miary kątów wewnętrznych czworokąta, zatem  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ . Równoległobok  $ABCD$  ma więc kąt prosty. Wobec tego wszystkie jego kąty są proste, więc jest to prostokąt.



### Alternatywne zakończenie dowodu

Zdający dostrzega, że  $2ab = ab(\sin \alpha + \sin \gamma)$  i wnioskuje stąd, że  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ . Następnie postępuje analogicznie jak w pierwszym rozwiązaniu: na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów  $DAB$  i  $BCD$  stwierdza, że  $a = b$  i stąd wyprowadza wniosek, że rozważany czworokąt jest prostokątem.

## Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny** ..... 1 pkt

Zdający zapisze pole czworokąta  $ABCD$  jako sumę pól trójkątów  $ABC$  oraz  $CDA$  i ułoży równanie  $a^2 \sin(\beta) = b^2 \sin(\delta) = a^2 + b^2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

- Zdający stwierdzi, że kąty  $\beta$  oraz  $\delta$  są równe  $90^\circ$  na podstawie własności funkcji trygonometrycznych albo
- stwierdzi, że  $2ab = ab(\sin \alpha + \sin \gamma)$  i wywnioskuje, że  $\alpha = \gamma = 90^\circ$  albo
- stwierdzi, że  $a^2 + b^2 = 2ab$  i wywnioskuje stąd, że  $a = b$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zdający wywnioskuje, że rozważany czworokąt jest prostokątem.

## Zadanie 9. (0–3)

| Wymaganie ogólne                  | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | R7.5. Planimetria.<br>Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. |

## Przykładowe rozwiązania

### Sposób I

Niech  $\angle ADB = \alpha$ . Z twierdzenia sinusów wynika, że  $\frac{\sqrt{3}}{\sin(60^\circ)} = \frac{|BD|}{\sin(60^\circ)} = \frac{|BA|}{\sin(\alpha)} = \frac{2}{\sin(\alpha)}$ . Wnioskujemy stąd, że  $\sin(\alpha) = \frac{2 \sin(60^\circ)}{\sqrt{3}} = 1$ , więc  $\alpha = 90^\circ$ . Skoro kąt  $ADB$  jest prosty, to kąt  $ABD$  ma miarę  $30^\circ$ , więc  $|\angle CBD| = 60^\circ$  oraz  $|\angle BDC| = 30^\circ$ . Na mocy twierdzenia Pitagorasa  $|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = 1$ . Mamy też  $|BC| = |BD| \cdot \sin(\angle BDC) = \sqrt{3} \cdot \sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równość:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}. \text{ Wobec tego } |AC| = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

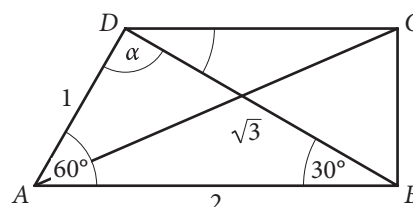
### Sposób II

Z twierdzenia cosinusów wynika, że

$$3 = |BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos(60^\circ) = |AD|^2 + 4 - 2|AD| = (|AD| - 1)^2 + 3,$$

więc  $(|AD| - 1)^2 = 0$ , czyli  $|AD| = 1$ .

Stąd wynika, że  $|BC| = |AD|\sin(\angle BAD) = 1 \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że  $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 = \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4}$ , zatem  $|AC| = \frac{\sqrt{19}}{2}$ .



### Sposób III

Z twierdzenia kosinusów wynika, że

$$3 = |BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos(60^\circ) = |AD|^2 + 4 - 2|AD| = (|AD| - 1)^2 + 3,$$

więc  $(|AD| - 1)^2 = 0$ , czyli  $|AD| = 1$ . Stąd wynika, że

$$|CD| = |AB| - |AD|\cos(\sphericalangle BAD) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Kąt } ADC \text{ ma miarę } 120^\circ, \text{ bo suma}$$

miar kątów  $BAD = 60^\circ$  i  $ADC$  jest równa  $180^\circ$ . Z twierdzenia kosinusów wynika, że

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD| \cdot |CD|\cos(\sphericalangle ADC) = 1 + \frac{9}{4} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos(120^\circ) = \frac{19}{4}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny** ..... 1 pkt

- Zdający zastosuje twierdzenie sinusów dla trójkąta  $ADB$ :  $\frac{\sqrt{3}}{\sin(60^\circ)} = \frac{2}{\sin(\alpha)}$

albo

- wyznaczy z twierdzenia kosinusów długość  $|AD| = 1$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

- Zdający wyznaczy miary kątów  $ADB$ ,  $ABD$  oraz  $BDC$

albo

- znajdzie długość odcinka  $BC$ , korzystając z definicji sinusa

albo

- znajdzie długość odcinka  $CD$ , odejmując od  $|AB|$  liczbę  $|AD|\cos(60^\circ)$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zdający wyznaczył długość przekątnej  $AC$ :  $|AC| = \frac{\sqrt{19}}{2}$ .

### Zadanie 10. (0–3)

| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych. |

### Przykładowe rozwiązania

Niech  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  będzie piątką liczb wylosowanych bez zwracania ze zbioru  $\{1, \dots, 100\}$ , przy czym zakładamy, że  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ . Jeśli liczby te są kolejnymi wyrazami ściśle rosnącego ciągu geometrycznego o ilorazie  $q$ , to jest jasne, że

$$1 \leq a_1 < a_2 = a_1 q < a_3 = a_1 q^2 < a_4 = a_1 q^3 < a_5 = a_1 q^4 \leq 100.$$

Interesuje nas tylko przypadek, gdy  $q$  jest liczbą całkowitą większą od 1, a więc skoro  $4^4 > 100$ , to musi zachodzić nierówność  $2 \leq q \leq 3$ . Wykazaliśmy, że ilorazem ciągu geometrycznego  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  może być liczba 2 lub liczba 3, a zatem kolejne jego wyrazy to  $a_1, 2a_1, 4a_1, 8a_1, 16a_1$  lub  $a_1, 3a_1, 9a_1, 27a_1, 81a_1$ . W pierwszym przypadku z nierówności  $16a_1 \leq 100$  wynika, że  $a_1 \leq 6$ , więc istnieje 6 możliwych do wylosowania piątek liczb, które ustawione w odpowiedniej kolejności tworzą ciąg geometryczny o ilorazie  $q = 2$ . W drugim przypadku  $a_1 = 1$ , ponieważ  $81a_1 \leq 100$ , a zatem jest jedna możliwa do wylosowania piątka liczb, które ustawione w odpowiedniej kolejności tworzą ciąg geometryczny o ilorazie  $q = 3$ .

Sposobów wylosowania (bez zwracania) pięciu liczb spośród stu jest  $\binom{100}{5}$ . W siedmiu przypadkach, jak wykazaliśmy, można wylosowane liczby ustawić w taki sposób, by utworzyły ściśle rosnący ciąg geometryczny o całkowitym ilorazie. Szukane prawdopodobieństwo jest równe zatem

$$\frac{7}{\binom{100}{5}} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{1}{5 \cdot 33 \cdot 7 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{1}{10755360}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny** ..... 1 pkt

Zdający zauważy i uzasadni to, że ilorazem wylosowanego ciągu geometrycznego może być jedynie 2 lub 3.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zdający zauważy, że pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego o ilorazie 3 może być wyłącznie liczba 1, a jeśli ilorazem ciągu geometrycznego jest liczba 2, to pierwszym wyrazem ciągu może być jedna z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zdający stwierdzi, że jest siedem ciągów geometrycznych spełniających warunki zadania, zaś wszystkich możliwych do wylosowania ciągów jest  $\binom{100}{5}$ . Na tej podstawie wyznaczy prawdopodobieństwo w postaci ilorazu  $\frac{7}{\binom{100}{5}}$  lub równoważnego.

### Uwagi:

- 1) W zadaniu można rozpatrywać piętki uporządkowane lub zbiory pięcioelementowe; nie wpływa to na wynik, a na opis rozwiązania – nieznacznie.
- 2) Można to zadanie rozwiązać wypisując ciągi spełniające warunki zadania, bez przeprowadzonego rozumowania.
- 3) Wynik w postaci  $\frac{7 \cdot 5!}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}$  lub  $\frac{7}{\binom{100}{5}}$  jest akceptowalny – zdający nie musi wykonać mnożenia liczb w liczniku, tym bardziej w mianowniku.

### Zadanie 11. (0–4)

| Wymaganie ogólne               | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | <p>6. Trygonometria. Zdający:</p> <p>P4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:<br/>[...] <math>\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}</math> oraz <math>\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha</math>;</p> <p>R5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów;</p> <p>R6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu<br/> <math>\sin 2x = \frac{1}{2}</math>, <math>\sin 2x + \cos x = 1</math>, <math>\sin x + \cos x = 1</math>, <math>\cos 2x &lt; \frac{1}{2}</math>.</p> |

### Przykładowe rozwiązania

Zapisujemy założenia dotyczące miar kątów  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Ponieważ są to kąty w trójkącie, więc miara każdego z nich należy do przedziału  $(0^\circ, 180^\circ)$  oraz  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Ponadto, aby istniały tangensy  $\alpha$  i  $\beta$ , muszą być spełnione warunki  $\alpha \neq 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$ .

#### Sposób I

Mnożymy obie strony równości przez  $\sin^2 \beta \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 0$  i otrzymujemy równość  $\operatorname{tg} \beta \sin^2 \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \beta$ .

Następnie przedstawiamy  $\operatorname{tg} \alpha$  i  $\operatorname{tg} \beta$  odpowiednio w postaci  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  i  $\frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ . Otrzymujemy:

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin^2 \beta, \text{ czyli równoważnie } \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin^2 \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin^2 \beta = 0$$

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \left( \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = 0$$

Ponieważ  $\sin \alpha \cdot \sin \beta \neq 0$ , więc  $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$ .

Stąd, po pomnożeniu obu stron równości przez  $\cos \alpha \cdot \cos \beta \neq 0$ , otrzymujemy

$$\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta = 0$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \beta \cos \beta = 0$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$$

Powyższa równość zachodzi albo dla równych kątów ( $2\alpha = 2\beta$ ), albo dla kątów, których suma jest równa  $180^\circ$  ( $2\alpha = 180^\circ - 2\beta$ ), stąd  $\alpha = \beta$  lub  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , czyli  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , a to z kolei oznacza, że  $\gamma = 90^\circ$  ( $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ).

Co należało udowodnić.

#### Sposób II

Po zapisaniu założeń dotyczących miar kątów  $\alpha, \beta, \gamma$  zapisujemy daną równość w postaci:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} : \frac{\sin \beta}{\cos \beta}, \text{ skąd } \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta}$$

Następnie dzielimy obie strony otrzymanej równości przez  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \neq 0$  i otrzymujemy  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$ ,

co jest równoważne równości  $\sin \alpha \cos \alpha = \sin \beta \cos \beta$ . Dalej jak w sposobie I.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt**

Zdający zapisze równość  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$  w postaci  $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin^2 \beta$  lub

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta}, \text{ wraz z założeniami } \alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 180^\circ) \text{ i } \alpha \neq 90^\circ, \beta \neq 90^\circ.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający przekształci wyjściową równość do postaci  $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający zapisze przynajmniej jedną zależność między kątami:  $\alpha = \beta$  lub  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ( $2\alpha = 180^\circ - 2\beta$ ).

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze pełny wniosek:  $\alpha = \beta$  lub  $\gamma = 90^\circ$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający nie zapisze założeń  $\alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$  i  $\alpha \neq 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$  na żadnym z etapów rozwiązywania zadania, ale poprawnie wykona wszystkie przekształcenia, to za rozwiązanie otrzymuje **2 pkt**.

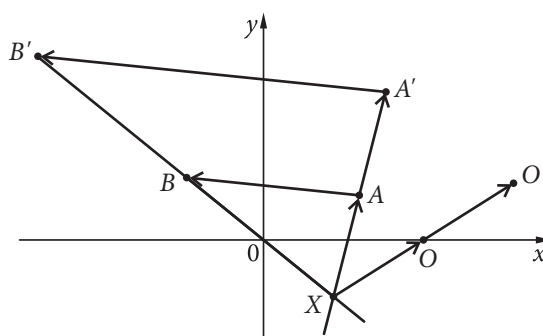
## Zadanie 12. (0–4)

| Wymaganie ogólne                  | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | <p>R7. Planimetria. Zdający:</p> <p>3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności [...];</p> <p>4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.</p> <p>R8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu [...].</p> |

### Przykładowe rozwiązania

#### Sposób I

Zauważmy, że środek  $X$  jednokładności  $f$  leży na przecięciu prostych  $AA'$  oraz  $BB'$ .



Wyznaczamy równania tych prostych. Pierwsze z nich to  $y = 4x - 10$ , a drugie:  $y = -x$ . Proste te przecinają się w punkcie  $X = (2, -2)$ . Obliczamy skalę jednokładności.

Mamy  $\overrightarrow{XA'} = [2, 8] = 2[1, 4] = 2\overrightarrow{XA}$ . Z definicji jednokładności wynika, że skalą  $f$  jest 2. Szukany środek okręgu, którego obrazem przy  $f$  jest okrąg o równaniu  $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$ , oznaczamy przez  $O = (x_0, y_0)$ . Środkiem okręgu o równaniu  $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$  jest  $O' = (8, 2)$ . Skalą jednokładności jest 2, więc mamy  $2\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XO'} = [6, 4]$ , czyli  $\overrightarrow{XO} = [3, 2]$ .

Zatem  $O = (2, -2) + [3, 2] = (5, 0)$ .

Okrąg o równaniu  $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$  ma promień równy 2, zatem szukany okrąg ma promień równy 1 (figury te są podobne, a skala podobieństwa to 2). Ma on zatem równanie  $(x - 5)^2 + y^2 = 1$ .

#### Sposób II

Wyznaczamy wektory  $\overrightarrow{AB} = [-6, 1]$  oraz  $\overrightarrow{A'B'} = [-12, 2]$ . W rozwiązaniu tym korzystamy z faktu, że jeśli  $k$  jest skalą jednokładności  $f$ , to dla każdego punktu  $P$ ,  $Q$  oraz ich obrazów  $P' = f(P)$ ,  $Q' = f(Q)$  w jednokładności  $f$ , zachodzi równość wektorów  $k \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ . Skoro  $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ , to  $k = 2$ . (Skalę można wyznaczyć także bezpośrednio z definicji jednokładności o środku  $X$ :  $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB}$  oraz  $\overrightarrow{XA'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{XB'}$ . Ale z definicji jednokładności  $\overrightarrow{XA'} = k \cdot \overrightarrow{XA}$  oraz  $\overrightarrow{XB'} = k \cdot \overrightarrow{XB}$ . Co więcej, rachunki wyżej dają  $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ . A zatem  $\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{XB}$ . Napisane na początku równanie pomnożone przez  $k$  daje nam  $k \cdot \overrightarrow{XA} + k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{XB}$ , zatem  $k = 2$ ).

Szukany środek okręgu, którego obrazem przy  $f$  jest okrąg o równaniu  $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$  oznaczamy przez  $O = (x_0, y_0)$ . Środek okręgu o równaniu  $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$  oznaczamy jako  $O'$ . Jest to punkt  $(8, 2)$ . Zgodnie z wyznaczoną skalą jednokładności mamy  $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} = [4, -4]$  (ponownie korzystamy tu z zapisanej wyżej własności skali jednokładności). Zatem  $\overrightarrow{AO} = [2, 2]$  i  $O = (5, 0)$ . Okrąg o równaniu  $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$  ma promień równy 2, a zatem szukany okrąg ma promień równy 1 (figury te są podobne, a skala podobieństwa to 2). Szukany okrąg ma równanie  $(x - 5)^2 + y^2 = 1$ .

### Sposób III

Korzystamy ze wzorów na jednokładność w układzie współrzędnych: jednokładność o środku w punkcie  $O(x_0, y_0)$  i skali  $s \neq 0$  przekształca punkt  $A = (x, y)$  na punkt  $A' = (sx + (1-s)x_0, sy + (1-s)y_0)$ . Podstawiamy współrzędne punktów i ich obrazów i otrzymujemy układ równań. Rozwiązujemy ten układ i wyznaczamy środek i skalę jednokładności. Kolejne użycie wzorów do obliczonej jednokładności pozwala na wyznaczenie środka okręgu, gdyż obrazem okręgu w jednokładności jest okrąg.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt**

- Zdający stwierdzi, że środek jednokładności znajduje się na przecięciu prostych przechodzących odpowiednio przez pary punktów  $A, A'$  oraz  $B, B'$ , a następnie wyznaczy równania tych prostych

albo

- wyznaczy wektory  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$  oraz skalę jednokładności

albo

- podstawí współrzędne punktów do równań analitycznych na jednokładność, otrzymując układ równań.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 pkt**

- Zdający wyznaczy punkt przecięcia prostych przechodzących odpowiednio przez pary punktów  $A, A'$  oraz  $B, B'$ , czyli  $X = (2, 2)$  oraz, z definicji, skalę jednokładności

albo

- wyznaczy środek  $O' = (8, 2)$  i promień  $r = 2$  okręgu  $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$ , a następnie, znając skalę jednokładności  $f$  i warunki łączące wektory  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O}$ , wyznaczy środek  $O = (5, 0)$  szukanego okręgu

albo

- rozwiąże układ równań, wyznaczając przekształcenie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający obliczy jeden z parametrów szukanego okręgu: środek lub promień.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający wyznaczy równanie szukanego okręgu  $(x - 5)^2 + y^2 = 1$ .

### Zadanie 13. (0–5)

| Wymaganie ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | <p>R1.4. Liczby rzeczywiste.<br/>Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.</p> <p>R3.2. Równania i nierówności.<br/>Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem.</p> <p>P4.14. Funkcje.<br/>Zdający szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.</p> |

### Przykładowe rozwiązanie

Dziedziną równania  $(1-m)9^x + 4 \cdot 3^x = m+2$  jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Podstawiamy  $y = 3^x$ . Wtedy wyjściowe równanie można zapisać w postaci  $(m-1)y^2 - 4y + m+2 = 0$ . Funkcja wykładnicza  $f(x) = 3^x$  jest różnowartościowa, zatem dla każdego  $m$  nowe równanie ma tyle samo dodatnich rozwiązań, co wyjściowe rzeczywistych.

Dla  $m = 1$  równanie przybiera postać  $4y = 3$ , więc ma dokładnie jedno rozwiązanie równe  $y = \frac{3}{4}$ .

Jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest więc w tym przypadku  $x = \log_3\left(\frac{3}{4}\right)$ .

Niech  $m \neq 1$ . Wówczas  $(m-1)y^2 - 4y + m+2 = 0$  jest równaniem kwadratowym zmiennej  $y$  i ma ono dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy  $0 < \Delta = 16 - 4(m-1)(m+2) = -4(m^2 + m - 6) = -4(m-2)(m+3)$ , więc gdy  $-3 < m < 2$ . Ponieważ jednak  $y > 0$ , więc obydwa rozwiązania muszą być dodatnie. Z wzorów Viète'a wynika, że iloczynem tych pierwiastków jest liczba  $\frac{m+2}{m-1}$ , a ich sumą – liczba  $\frac{4}{m-1}$ . Obie te liczby muszą być dodatnie. Mamy więc  $m-1 > 0$ .

Uwzględniając warunek  $-3 < m < 2$ , uzyskany przy rozpatrywaniu wyróżnika, widzimy, że równanie  $(1-m)9^x + 4 \cdot 3^x = m+2$  dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy  $1 < m < 2$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt**

Zdający rozpatrzy przypadek  $m = 1$  lub zaproponuje podstawienie  $y = 3^x$ , sprowadzające wyjściowe równanie do równania postaci  $(m-1)y^2 - 4y + m+2 = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 pkt**

Zdający stwierdzi, że równanie  $(m-1)y^2 - 4y + m+2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki tylko w przypadku, gdy  $m \neq 1$  i wyróżnik jest dodatni. Wyznaczy ograniczenia związane z liczbą  $m$ , wynikające z tego warunku:  $-3 < m < 2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający stwierdzi, że obydwa pierwiastki muszą być dodatnie i wypisze, na podstawie wzorów Viète'a, warunki:

$\frac{m+2}{m-1} > 0$  oraz  $\frac{4}{m-1} > 0$ , które dodatkowo musi spełniać parametr  $m$ .

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 pkt**

Zdający rozwiąże nierówności przedstawione w powyższym punkcie, uzyskując warunek  $m > 1$ . Nie uwzględni jednak warunku  $-3 < m < 2$ . W przypadku, gdy zdający doprowadzi poprawnie rozumowanie dotyczące przypadku  $m \neq 1$  do końca, ale nie uwzględni warunku  $m = 1$ , również dostaje 4 punkty.

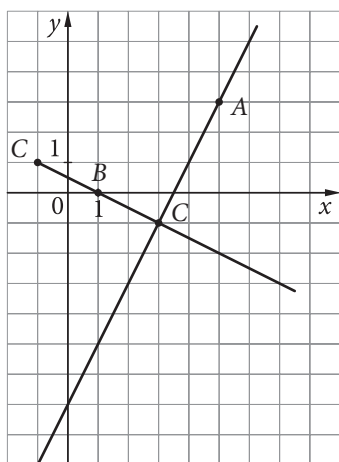
**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający rozwiąże nierówności wynikające z wypisanych warunków i uwzględniając wcześniejsze ograniczenia wynikające ze znaku wyróżnika uzyskuje odpowiedź:  $m \in (1, 2)$ . Uwzględni przy tym w dyskusji przypadek  $m = 1$ . Jeśli w rozwiązaniu nie powołuje się wprost na różnowartościowość funkcji wykładniczej, nie traci za to punktów.

# Zadanie 14. (0–5)

| Wymaganie ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:<br>P3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;<br>R4) oblicza odległość punktu od prostej. |

## Przykładowe rozwiązanie



Na początku sprawdzamy, przez który wierzchołek trójkąta  $ABC$  przechodzi wysokość trójkąta, czyli prosta  $y = 2x - 7$ . Prosta ta nie jest prostopadła do prostej  $AB$ , której współczynnikiem kierunkowym jest liczba  $\frac{3-0}{5-1} = \frac{3}{5} \neq -\frac{1}{2}$ , wobec tego nie zawiera ona wysokości poprowadzonej z punktu  $C$ .  $0 \neq 2 \cdot 1 - 7$ , więc punkt  $B$  nie leży na prostej  $y = 2x - 7$ , a  $3 = 2 \cdot 5 - 7$ , więc punkt  $A$  leży na prostej  $y = 2x - 7$ , więc zawiera ona wysokość poprowadzoną z punktu  $A$ .

Prosta zawierająca punkty  $B, C$ , opisana równaniem  $y = ax + b$ , jest zatem prostopadła do prostej  $y = 2x - 7$ . W szczególności  $a = -\frac{1}{2}$ . Po wstawieniu współrzędnych punktu  $B$  do równania  $y = -\frac{1}{2}x + b$  otrzymujemy  $b = \frac{3}{2}$ . Wysokość  $h$  poprowadzona z punktu  $A$  do prostej  $BC$  to odległość punktu  $A$  od prostej  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

Równanie ogólne tej prostej to  $\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} = 0$ . Zatem wysokość  $h = \frac{\left| \frac{1}{2} \cdot 5 + 3 - \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}} = 2\sqrt{5}$ .

Skoro pole trójkąta  $ABC$  równe jest  $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h = 5$ , to  $|BC| = \sqrt{5}$ . Szukamy zatem punktów o współrzędnych  $(x, y)$  leżących na prostej  $BC$  odległych od punktu  $B$  o  $\sqrt{5}$ . Współrzędne  $(x, y)$  punktu  $C$  spełniają zatem warunki  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5}$  oraz  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ . Z nich wynika równanie kwadratowe  $5 = (x-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 1\right)^2 = (x-1)^2 + \frac{1}{4}(-x+1)^2 = \frac{5}{4}(x-1)^2$ , czyli  $4 = (x-1)^2$ .

Jego rozwiązaniami są liczby  $x = -1$  oraz  $x = 3$ .

Z równania  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  wynika, że  $C = (3, -1)$  lub  $C = (-1, 1)$ .

## Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt**

Zdający sprawdzi, że punkt  $A$  leży na prostej  $y = 2x - 7$  oraz że prosta ta jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty  $B, C$ .

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 pkt**

Zdający wyznaczy równanie prostej zawierającej bok  $BC$ :  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający wyznaczy odległość punktu  $A$  od prostej ( $2\sqrt{5}$ ) oraz, korzystając ze wzoru na pole trójkąta, wyznaczy  $|BC| = \sqrt{5}$ .

**Rozwiązanie prawię pełne** ..... 4 pkt

W oparciu o warunki dotyczące punktu  $C = (x, y)$  zdający wypisze warunki  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{5}$  oraz  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  i uzyska odpowiednie równanie kwadratowe zmiennej  $x$  lub  $y$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Zdający rozwiąże uzyskane równanie i uzyska możliwe współrzędne punktu  $C$ :  $(3, -1)$  oraz  $(-1, 1)$ .

### Zadanie 15. (0–6)

| Wymaganie ogólne               | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | <p>P4. Funkcje. Zdający:</p> <p>3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości [...]);</p> <p>13) szkicuje wykres funkcji <math>f(x) = a/x</math> dla danego <math>a</math>, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.</p> <p>R11. Rachunek różniczkowy. Zdający:</p> <p>2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;</p> <p>3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.</p> |

### Przykładowe rozwiązanie

a)

Rozwiązujemy układ równań, np. metodą przeciwnych współczynników. Otrzymujemy:

$m = \frac{p}{p+1}$  i  $n = \frac{p+2}{p+1}$ , gdzie  $p \neq -1$ . Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb  $(m_0, n_0) = \left(\frac{p}{p+1}, \frac{p+2}{p+1}\right)$ ,  $p \neq -1$ .

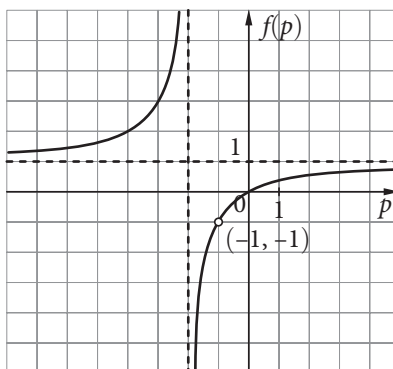
Wyznaczamy wzór funkcji  $f$ :  $f(p) = \frac{p}{p+1} : \frac{p+2}{p+1} = \frac{p}{p+2}$  i podajemy jej dziedzinę:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ .

Aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji  $f$ , przekształcamy jej wzór:

$$f(p) = \frac{p}{p+2} = \frac{(p+2)-2}{p+2} = \frac{-2}{p+2} + 1, \quad p \in D.$$

Prosta  $y = 1$  jest asymptotą poziomą wykresu funkcji  $f$ , zatem liczba 1 nie należy do zbioru wartości funkcji  $f$ . Ponieważ  $-1 \in D$ , więc rozpatrując funkcję  $g(x) = \frac{x}{x+2}$ , której dziedziną jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , stwierdzamy, że do zbioru wartości funkcji  $f$  nie należy liczba  $g(-1) = -1$ .

Można też wykorzystać wykres funkcji  $f$  i zauważyć, że do wykresu nie należy punkt  $(-1, -1)$ .



Zatem  $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

b)

### Sposób I

Wyznaczamy funkcję pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(p) = \left( \frac{p}{p+2} \right)' = \frac{1(p+2) - 1 \cdot p}{(p+2)^2} = \frac{2}{(p+2)^2} \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}.$$

Obliczamy wartość pochodnej dla  $p = -3$ :

$$f'(-3) = \frac{2}{(-3+2)^2} = 2$$

Obliczamy rzędną punktu  $P$ :  $f(-3) = \frac{-3}{-3+2} = 3$

Zatem  $P = (-3, 3)$ .

Wyznaczamy równanie stycznej do wykresu  $f$  w punkcie  $P$ :

$$y = f'(-3)(p+3) + 3$$

$$y = 2(p+3) + 3$$

$$y = 2p + 9$$

### Sposób II

Wyznaczamy rzędną punktu  $P$ :  $f(-3) = 3$ , czyli  $P = (-3, 3)$ .

Zapisujemy równanie stycznej  $s$  do wykresu  $f$  w postaci:  $y = ap + b$ . Ponieważ  $P \in s$ , więc  $3 = -3a + b$ , skąd  $b = 3a + 3$ .

Zatem równanie stycznej można zapisać:  $y = ap + (3a + 3)$ .

Prosta styczna do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P$  ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny (jako styczna do jednej z gałęzi hiperboli).

Stąd układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{p}{p+2} \\ y = ap + (3a + 3) \end{cases}, \text{ gdzie } p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}, \text{ ma dokładnie jedno rozwiązanie.}$$

Rozwiązujemy układ równań i w wyniku otrzymujemy równanie

$$ap^2 + (5a + 2)p + (6a + 6) = 0.$$

Ponieważ  $a \neq 0$  (prosta o równaniu  $y = b$  nie może być styczną do hiperboli), więc otrzymujemy równanie kwadratowe, które musi mieć jedno rozwiązanie, a zatem  $\Delta = 0$ .

$$\Delta = (5a + 2)^2 - 4a(6a + 6) = 25a^2 + 20a + 4 - 24a^2 - 24a = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

$$(a - 2)^2 = 0, \text{ skąd } a = 2.$$

Zatem równanie stycznej ma postać:  $y = 2p + 3 \cdot 2 + 3$ , czyli  $y = 2p + 9$ .

Odpowiedź:

$$\text{a) } f(p) = \frac{p}{p+2}, D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

$$\text{b) } y = 2p + 9.$$

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów:

a) Pierwszy etap składa się z czterech części:

$$\text{– rozwiązanie układu równań: } m_0 = \frac{p}{p+1} \text{ i } n_0 = \frac{p+2}{p+1}$$

$$\text{– zapisanie wzoru funkcji } f(p) = \frac{p}{p+2} \text{ i podanie jej dziedziny } D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

$$\text{– przekształcenie wzoru funkcji } f \text{ do postaci } f(p) = \frac{-2}{p+2} + 1 \text{ LUB sporządzenie wykresu funkcji}$$

$$\text{– uzasadnienie, że } -1 \notin D \text{ i podanie zbioru wartości funkcji } f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Za poprawne rozwiązanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**.

b) Drugi etap składa się z dwóch części:

**Sposób I**

- wyznaczenie wzoru funkcji pochodnej  $f'(p) = \frac{2}{(p+2)^2}$ ,  $p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ , i obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej  $f'(-3) = \frac{2}{(-3+2)^2} = 2$ ,
- obliczenie drugiej współrzędnej punktu styczności  $f(-3) = 3$  i wyznaczenie równania stycznej do wykresu funkcji  $f$ :  $y = 2p + 9$ .

**Sposób II**

- zapisanie równania stycznej w postaci  $y = ap + (3a + 3)$  oraz zauważenie, że układ równań 
$$\begin{cases} y = \frac{p}{p+2} \\ y = ap + (3a + 3) \end{cases}$$
, gdzie  $p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ , musi mieć jedno rozwiązanie
- rozwiązanie układu i obliczenie  $a = 2$  oraz wyznaczenie równania stycznej  $f$ :  $y = 2p + 9$ .

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwagi**

- 1) Jeżeli zdający nie uwzględni we wzorze funkcji  $f$  założenia  $p \neq -1$ , a tym samym błędnie wyznaczy  $f(D)$ , to w części a) otrzymuje **2 punkty**.
- 2) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w części a), np. podczas wyznaczania pary liczb  $(m_0, n_0)$ , albo błędnie zapisze wzór funkcji  $f$ , ale konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje za całość **5 punktów**.
- 3) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w części b), ale konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje za tę część **1 punkt**.

**Zadanie 16. (0–7)**

| Wymagania ogólne               | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | R11. Rachunek różniczkowy. Zdający:<br>4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji;<br>5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;<br>6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Niech  $h$  będzie długością krawędzi prostopadłościanu łączącej podstawy prostopadłościanu. Niech  $y$  będzie długością boku przekroju rozważanego prostopadłościanu, nie będącego krawędzią podstawy. Wiadomo, że  $\sqrt{3} = xy$ . Co więcej, na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy  $y^2 = h^2 + x^2$ . A zatem  $\sqrt{3} = x\sqrt{h^2 + x^2}$ . Objętość  $V$  prostopadłościanu równa jest iloczynowi pola podstawy i wysokości, a więc  $V = x^2h$ , zaś  $V^2 = x^4h^2$ . Liczbę  $h^2$  wyznaczamy ze wzoru na pole przekroju:  $h^2 = \frac{3-x^4}{x^2}$ . W szczególności kwadrat objętości prostopadłościanu wyrazić można za pomocą następującej funkcji zmiennej  $x$ :  $V^2(x) = x^2(3-x^4) = 3x^2 - x^6$ . Wyrażenie to rozpatrujemy dla tych  $x$ , dla których opisuje ono kwadrat objętości, więc gdy  $3-x^4 > 0$  oraz  $x > 0$ , czyli gdy  $x \in (0, \sqrt[4]{3})$ . Pochodna funkcji  $V^2(x)$  równa jest  $(V^2)'(x) = 6x - 6x^5$ . Rozwiązujemy następnie równanie,  $(V^2)'(x) = 0$ , a więc równanie  $6x - 6x^5 = 6x(1-x)(1+x)(1+x^2) = 0$ . Jedyne rozwiązanie mieszczące się w wyznaczonym wcześniej zakresie wartości to  $x = 1$ . Dla  $x \in (0, 1)$  funkcja  $(V^2)'(x)$  jest dodatnia (iloczyn czterech dodatnich czynników), a więc  $V^2(x)$  jest rosnąca na przedziale otwarto-domkniętym  $(0, 1]$ , zaś dla  $x > 1$  – funkcja  $(V^2)'(x)$  jest ujemna (trzy czynniki dodatnie, jeden ujemny), a więc  $V^2(x)$  jest malejąca

w przedziale domknięto-otwartym  $\langle 1, \sqrt[4]{3} \rangle$ . Wynika stąd, że największą wartością funkcji  $V^2(x)$  w przedziale  $(0, \sqrt[4]{3})$  jest jej wartość w punkcie 1, czyli liczba  $V^2(1) = 2$ . Skoro kwadrat objętości jest największy dla  $x = 1$ , to największa objętość samego prostopadłościanu przy zadanych warunkach równa jest  $\sqrt{2}$ . Długości krawędzi prostopadłościanu, którego objętość jest największa, to liczby 1, 1,  $\sqrt{2}$ .

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów:

a) Pierwszy etap składa się z trzech części:

- wprowadzenie oznaczeń i wyznaczenie wzoru na wysokość prostopadłościanu:  $h^2 = \frac{3 - x^4}{x^2}$ ,
- wyznaczenie kwadratu objętości prostopadłościanu jako funkcji jednej zmiennej  $x$ :  
 $V^2(x) = x^2(3 - x^4)$ , na podstawie wzoru  $V(x) = x^2h$ ,
- wyznaczenie tych  $x$ , dla których wyrażenie  $V^2(x)$  jest kwadratem objętości prostopadłościanu: są to  $x \in (0, \sqrt[4]{3})$ ,

Za poprawne rozumowanie w każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**.

b) Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej  $V^2(x) = x^2(3 - x^4)$ , czyli  $(V^2)'(x) = 6x - 6x^5$ .
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $V^2(x)$  mieszczących się w zakresie rozważanych  $x$ , jest jedno:  $x = 1$ ,
- zbadanie znaku pochodnej funkcji  $V^2(x)$  i uzasadnienie, że dla  $x = 1$  funkcja  $V^2(x)$  osiąga największą wartość.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

c) Trzeci etap. Obliczenie największej objętości prostopadłościanu  $V(1) = \sqrt{2}$ . Znalezienie długości krawędzi prostopadłościanu o największej możliwej objętości: 1, 1,  $\sqrt{2}$ . Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.